Websites:
http://www.sciencepub.net/academia
http://www.sciencepub.net

Emails:
aarena@gmail.com
editor@sciencepub.net

Academia Arena

MARSLAND PRESS
Multidisciplinary Academic Journal Publisher

陈秀雄微分几何得证启发科学殿堂内外

樊韦芬

Recommended: 王德奎 (Wang Dekui), 绵阳日报社, 绵阳, 四川 621000, 中国, y-tx@163.com

摘要：陈秀雄、王兵教授等证明的"哈密尔顿--田刚猜想"等数学难题，打开了和科学殿堂内外"柯召--赵华明--魏时珍猜想"的联系----陈秀雄教授从科学殿堂外一个农村孩子，成长为科学殿堂内中国科技大学的著名教授，从 2014 年以来不断有重大成果的报道。而"柯猜翻转"难题的接地气，是 59 年后的今天，全球面对来势汹汹的突发新冠疫情才知道的----封城、隔离……原先能召开的重要的领导人大会，如今他们最好的办法是召开"视频连线"会议----在隔离的两个或多个空间中，能互通信息----类似"空心圆球不撕破和跳跃粘贴，能把内表面翻转成外表面"----类似"科统"--"柯统"。

[樊韦芬. **陈秀雄微分几何得证启发科学殿堂内外.** *Academ Arena* 2024;16(4):1-15]. ISSN 1553-992X (print); ISSN 2158-771X (online). http://www.sciencepub.net/academia. 01. doi:10.7537/marsaaj160424.01.

关键词：微分几何、里奇流、规范场、柯猜翻转、拓扑学

【0、引言】

浙江丽水市顶级科学家陈秀雄教授 1964 年出生，他写的一篇散文《记忆深处儿时梦》中说："我是青田山口镇人，童年的记忆里，我们村三面环山，一面临水。几百户人家，错落在山坳里。如果不是吃不饱饭，确乃世外桃源，人间仙境。那时候大家都穷，我们家也很困难，记忆中经常吃不饱。家父是石雕艺人，集体户口。我们其他人随家母是农村户口。所以我们不像公家的人有足够的粮票，也不象真正的农民有足够的粮食。每年的秋天父亲都要出远门，去更偏僻的农村向农民购买粮食。通常是番薯丝，因为一是便宜二是易饱，毛病是很快就饿。我们家五个小孩，填饱我们的肚子不容易，双亲肯定经常犯愁。我那时笨，只知道饿，不长肉，整个一难民。那时的梦想就是能把饭吃个够。我 1982 年从青田中学毕业，便离乡求学，现在在大学里教书。最让我魂牵梦萦的还是家乡的山、水和人。这些年，家乡的变化翻天覆地，早就超出了儿时的梦想，每次回乡都让我耳目一新"。

陈秀雄教授从科学殿堂外一个农村孩子，成长为科学殿堂内中国科技大学的著名教授，从 2014 年以来不断有重大成果的报道----陈秀雄教授与合作者英国著名数学家、菲尔兹奖得主西蒙•唐纳森教授，以及科大年轻校友、陈秀雄教授的学生孙崧博士，在他们的三篇文章中，陈-唐纳森-孙给出了唐纳森度量的存在性之丘成桐猜想的完整证明----在复几何的研究中解决了长期以来困扰数学家的法诺流形上卡勒-爱因斯坦度量的存在性问题。

《光明日报》2020 年 11 月 9 日第 1 版报道，中国科技大学教授陈秀雄、王兵发表在《微分几何学杂志》上的关于高维卡勒里奇流收敛性的论文，率先解决了哈密尔顿--田猜想和偏零阶估计猜想----这些均为几何分析领域 20 余年来悬而未决的核心猜想。他们解决的是复几何领域的核心问题，此问题可追踪到五十年代著名的卡拉比猜想。该猜想涉及到第一陈类有确定符号的卡勒流形上卡勒-爱因斯坦度量的存在性，按照第一陈类为负、零、正等可分为三种情况。

当第一陈类为负，卡拉比猜想被丘成桐和法国数学家 T. 奥宾在 1976 年独立解决。丘成桐同时解决了当第一陈类为零时的卡拉比猜测，并因此在 1982 年获得菲尔兹奖。第一陈类为正的卡勒流形也称作法诺流形，其上卡勒-爱因斯坦度量的存在性问题十分复杂，在卡拉比最初的猜想提出后近 60 年都未解决。上世纪九十年代初，丘成桐猜测法诺流形上卡勒-爱因斯坦度量的存在性与流形上的某种代数稳定性等价。多年来关于法诺流形上卡勒-爱因斯坦度量的存在性和必要性，一直是数学里一个具有挑战性的问题，对它的研究非常活跃，同时刺激数学多个领域的发展。

在许多数学家的努力下，法诺度量的必要性条件之前已经得到了澄清并证明。陈-唐纳森-孙的证明是突破性的，涉及到微分几何、代数几何、多复变函数、度量几何等众多数学分支。它不仅解决了一个基本问题，同时还发展了许多新颖有力的工具，以理解

卡勒几何、代数几何和偏微分方程之间的深刻联系。它建立了连接微分几何与代数几何的桥梁，在代数几何和理论物理中期待有重要应用，并将强力推动这些学科的发展。这项研究成果标志着唐纳森教授1998 年提出的研究计划的一个成功。同时该成果的取得，有赖于对近 20 年来各个领域众多数学家取得的基础性成果的关键运用。

【1、陈秀雄教授简介】

陈秀雄教授，1964 年生，浙江青田县山口镇人。美国威斯康星大学终身教授，美国纽约州立大学石溪分校教授。中国科学技术大学数学科学学院博士生导师，“吴文俊讲席教授”，上海科技大学数学科学研究所创始所长，特聘教授。国际著名的几何分析专家。

1987 年毕业于中国科大数学系，之后师从彭家贵教授，于中国科学院研究生院获硕士学位。1989 年他赴美国宾夕法尼亚大学学习，1994 年毕业，是著名几何学家卡拉比教授的最后一位博士生。2008 年夏他受唐纳森教授之邀共同研究卡勒-爱因斯坦度量的存在性，一直合作研究该课题至今。

陈秀雄教授曾应邀在第 24 届国际数学家大会上作 45 分钟邀请报告。2008 年被聘为中国科大“长江学者讲座教授”，2009 年被聘为中国科大首批“大师讲席（II）”教授，并入选国家第二批“千人计划”。陈秀雄教授长期致力于母校的人才培养引进与国际学术交流，自 2004 年起，连续 9 年组织几何学暑期学校，于 2006 年在科大创办“环太平洋复杂几何”国际会议，为母校数学学科的人才培养和学术交流做出了贡献。主要成就：成功解决了“丘成桐猜想.。

其主要研究领域，是大范围微分几何及非线性偏微分方程，是该领域国际著名的数学家。主要着力于研究 Kahler（卡勒）几何中的极值度量，Kahler-Ricci（卡勒-里奇）流和 Calabi（卡拉比）流的研究，其成果被认为是近十年以来 Kahler 几何重要进展的一个组成部分。在陈-唐纳森-孙的系列论文中，他们给出了“卡勒-爱因斯坦度量”的存在性之“丘成桐猜想”的完整证明。

根据唐纳森教授 2008 年提出的研究纲领，结合微分几何、代数几何、多复变函数、度量几何等多个数学分支的方法，经过多种方法创新，他们最终解决了“第一陈类”为正时的“丘成桐猜想” 田汉密尔顿----陈秀雄教授和英国数学家、菲尔兹奖得主唐纳森及孙崧博士合作，成功解决了“第一陈类”为正时的“丘成桐猜想”。陈秀雄与西蒙•唐纳森和孙崧合作证明的 Fano（法诺）流形上的稳定性猜想，被学界视作自佩雷尔曼解决庞加莱猜测以来微分几何领域最重大的突破，此外他还与其他合作者一道解决了多个著名猜想。他与王兵一起证明了 Fano 流形上 Kähler-Rcci（卡勒-里奇）流的 Hamilton-Tian（田刚--汉密尔顿）猜想。他和程经睿合作，在标量曲率满足一定的条件下，开创性地给出了 Kähler（卡勒）度量的先验估计，并最终验证了基要的增长性猜想和唐纳森测地稳定性猜想。

【2、陈秀雄与里奇流里奇曲率流】

中科大几何与物理研究中心创始主任陈秀雄教授，与王兵教授在国际知名数学期刊《微分几何学杂志》上发表的关于高维卡勒里奇流收敛性的论文，解决了几何分析领域二十余年悬而未决的核心猜想。

对曲率流(数量曲率流、里奇曲率流)等研究，四川师范大学数学科学学院何太平教授说：“在 20 世纪 70 年代初，丘成桐针对这一问题，给出了平行平均曲率向量的概念，其中曲率为常数。这是中曲率为零概念的自然推广。丘成桐算出了任意维球面的具有平行平均曲率向量的 n 维紧致子流形的第二基本形式长度平方 s 的拉普拉斯。丘成桐基本上解决了截面曲率的‘量子化现象’。它成为了以后数十年间研究各种类型的曲率的‘量子化现象’及其几何性质的‘工作平台’”。

20 世纪 80 年代，沿续上述方法，发展出了一种描述空间演化的微分几何学研究工具：“里奇流”的方法。陈秀雄、王兵和孙崧等基于里奇流方法给出的丘成桐稳定性猜想的新证明，研究了任意维球面的具有平行平均曲率向量的紧致子流形曲率的“量子化现象”问题，得到了三个最佳值。丘成桐证明：如果 s（第二基本形式长度的平方）不大于某一个常数 b(只与维数有关),则 s 等于零。

也就是说，这样的 s 也有“量子化现象”产生。他的工作是开创性的，只不过他只发现了坍塌现象。因此，丘成桐承认，这个常数 b 不是最佳值。当年，许许多多微分几何工作者都参与到了寻找这样 b 的最佳值的工作当中。北京大学的莫小欢教授、浙江大学的许洪伟教授取得了两个不错的常数，但并没有解决问题。

1995 年何太平教授在《科学通报》发表题论文，发现 s 既有坍塌，又有跃迁的“量子化现象”，并且给出了完全的几何分类，完整地解决了丘成桐的问题。他说具有平行平均曲率向量 n 维紧致子流形是极小子流形的概念的自然推广，人们自然想把以上结果推广到这种情形。大致思想是，找到这样一个最小的常数,使得当里奇曲率不小于这个数时，利用丘成桐算出的第二基本形式长度平方 s 的拉普拉斯，研究里奇曲率条件下子流形的几何性质。“平均值是什么呢？平均值是一组数的中心：一个数等于这个数减它们所在的一组数的平均值再加上这个平均值。主要有以下三点总结：1、放弃人们习惯的、普遍使用的“工作平台”，转移到另外的“平台”去工作；2、产生理解平均数是一组数的中心的基本想法，构造了一个“行星围绕太阳运转”的模型；3、有玩不等式的

硬功夫。

什么是里奇流？“里奇流”诞生于 20 世纪 80 年代，是一种描述空间演化的微分几何学研究工具。在微分几何中，“里奇流”是一种固有的几何学流动，它的主要思想是让流形随时间变形，即是让度规张量随时间变化，观察在流形的变形下，里奇曲率是如何变化的，以此来研究整体的拓扑性质。它的核心是汉密尔顿--里奇流方程，是一个拟线性抛物型方程组。里奇流以意大利数学家格雷戈里奥 • 里奇--库尔巴斯托罗的名字命名，由美国数学家理查德 • 哈密顿于 1981 年首次引入，也称里奇--哈密顿流。这个工具同时被俄罗斯数学家格里戈里 • 佩雷尔曼用于解决庞加莱猜想。里奇流的研究被王兵和李皓昭推广到平均曲率流的研究中，并成功解决了著名的延拓性猜想。

中国科科技大学数学科学学院的王兵教授，1998 年入学中科大少年班学院，2003 年赴美，求学于威斯康星大学麦迪逊分校数学系，于 2008 年博士毕业。此后历任普林斯顿大学讲师、石溪大学西蒙斯几何与物理中心研究助理教授以及威斯康星大学麦迪逊分校助理教授、副教授（终身教职）。2018 年王兵教授回到中科大数学科学学院工作，研究专长是几何流，特别是卡勒里奇流、里奇流和平均曲率流等。主要研究方向包括微分几何、代数几何、偏微分方程。

平均曲率流是当前几何分析的研究热点。研究平均曲率流的困难之处在于分析奇点的性质，一个长久未解决的问题是当平均曲率流出现奇点时，平均曲率是否会爆破？该问题被称为平均曲率流的延拓问题，十几年来长期悬而未决，吸引了众多几何流专家的注意力，相关研究文献非常丰富。陈秀雄和王兵发表的论文，完全解决了三维欧氏空间中闭嵌入平均曲率流的延拓问题。该论文证明综合运用了多方面的技巧，将俄罗斯数学家佩雷尔曼关于庞加莱猜想证明的思想，以及陈秀雄--王兵关于哈密尔顿--田刚猜想的证明方法引入到平均曲率流的研究中，本质上提高了某类平均曲率流极限解的弱紧性，从而将延拓问题归结为平均曲率流自相似解的稳定性问题。

【3、哈密尔顿--田刚和偏零阶估计的证明】

“哈密尔顿--田刚”和“偏零阶估计”的证明，是 2020 年 11 月陈秀雄、王兵在微分几何学领域取得重大突破----这是两个国际数学界 20 多年悬而未决的核心猜想；国际顶级数学期刊《微分几何学杂志》发表这一成果论文，篇幅超过 120 页，从写作到发表历时 11 年。

“强制性猜想”和“测地稳定性猜想”的证明，是 2021 年 11 月陈秀雄与合作者程经睿，在偏微分方程和复几何领域取得的“里程碑式结果”----解出了一个四阶完全非线性椭圆方程，成功证明“强制性猜想”和“测地稳定性猜想”这两个国际数学界 60 多年悬而未决的核心猜想，解决了若干有关卡勒流形上常标量曲率度量和卡拉比极值度量的著名问题。在弦论里，我们的宇宙是十维的时空，即通常的四维时空，和一个很小的六维空间。

而这些复杂的高维空间，必须是“卡勒--爱因斯坦度量”。一直以来它们只在理论物理学家的推演和数学家的计算中。在探索高维空间的过程中，1954 年意大利著名几何学家卡拉比（Calabi），在国际数学家大会上提出了一个伟大猜想：复杂的高维空间是由多个简单的多维空间“粘”在一起，因为简单的多维空间目前有成熟的数学工具能够进行解析，如果高维空间能够拆解，也就意味着高维空间可通过一些简单的几何模型拼装得到。这就是著名的“卡拉比猜想”----关于复几何领域高维空间的单值化的猜想，同时这也是求证高维空间上“卡勒--爱因斯坦度量”存在的猜想。

微分几何学起源于 17 世纪，主要用微积分方法研究空间的几何性质，对物理学、天文学、工程学等产生巨大推动作用。

“里奇流”诞生于 20 世纪 80 年代，是一种描述空间演化的微分几何学研究工具。大到宇宙膨胀，小到热胀冷缩，诸多自然现象都可以归结到空间演化。比如说我们吹一个气球，气球不断膨胀，可以用“里奇流”来研究它空间的变化，最后得到一个“尽善尽美”的理想结果。陈秀雄与王兵团队长期研究微分几何中“里奇流”的收敛性，运用新思想和新方法，他们在国际上率先证明了“哈密尔顿--田刚”和“偏零阶估计”这两个核心猜想。

卡勒流形上常标量曲率度量的存在性是几何中的核心问题之一。关于其存在性，有三个著名猜想----稳定性猜想、强制性猜想和测地稳定性猜想。经过众多著名数学家的工作，强制性猜想和测地稳定性猜想中的必要性已变得完全清晰，但其充分性的证明在此之前被认为遥不可及。求出一类四阶完全非线性椭圆方程的解，就能证明常标量曲率度量的存在性。陈秀雄、程经睿的工作恰恰就是在 K-能量强制性或测地稳定性的假设下，证明了这类方程解的存在。

他们不仅求出了方程的解，而且建立了一套系统研究此类方程的方法，为探索未知的数学世界提供了一种新工具。此外，他们还给出了环对称卡勒流形上稳定性猜想的证明，将唐纳森在环对称卡勒曲面上的经典定理推广到了高维，并对一般稳定性猜想的证明提出可能的解决方案，让一般稳定性猜想的完全解决成为可能。

【4、田刚和丘成桐】

丘成桐，1949 年 4 月生，广东汕头人。丘成桐

的父亲丘镇英，曾在香港香让学院及香港中文大学前身崇基学院任教，1963 年病逝，留下丘成桐的母亲及子女七人，造成丘家生活上的极大困难。

为维持一家人的生计，丘成桐的母亲及姐姐们每日工作十几个小时。丘成桐也不得不经常出外打短工，帮人补习功课，来解决部分生活费用及学费。那时他是香港培正中学初中三年级的学生，由于刻苦学习，于 1966 年秋以优异成绩考入香港中文大学数学系。

在大学期间，他在短短三年时间内，修完了全部必修课程，还阅读了大量的课外材料。1969 年初刚刚从美国加利福利亚大学伯克利分校取得学位的 S．萨拉夫博士，来到香港中文大学执教。在萨拉夫的推荐下，伯克利分校录取丘成桐为博士研究生，并授予 IBM 奖学金。

丘成桐放弃中文大学学士学位，提前退学，于 1969 年秋到伯克利．他的导师是著名微分几何学家陈省身。70 年代左右的加州大学伯克利分校，是世界微分几何的中心，云集了许多优秀的几何学家和年轻学者。在伯克利分校学习期间，丘成桐十分重视偏微分方程在微分几何中的作用。当时 C. 莫里教授仍在伯克利执教，他对偏微分方程理论有重大贡献，但他的讲课习惯使许多年轻人难于接受，加上偏微分方程历来是数学中难学的理论，因而导致众多学生中途退课。

最后只剩下丘成桐一人。尽管如此，丘成桐仍孜孜不倦地学习偏微分方程理论，为他以后的杰出工作打下牢固的基础。到伯克利分校一年后，即 1970 年底丘成桐完成了他的博士学位论文----通过 J．H．C．怀特海等人在 40-50 年代在几何及拓扑方面的工作，人们早已知道具非正截曲率的紧黎曼流形的同伦类由其基本群完全决定，是一个所谓 K(π，1)流形。因此自然且重要的问题是：作为这种流形的基本群的群是否具有一些特别的结构？这些特别结构的几何涵义是什么？丘成桐在他的博士论文中，对第一个问题给出了非常满意的回答。简单地说，他证明了这种流形的基本群的任何可解子群都必须是比伯巴赫子群。由此解决了当时著名的沃尔夫猜测，即如果一个具非正截曲率的紧黎曼流形的基本群是可解的，则这一流形实际上是平坦的----沃尔夫猜测，在当时吸引了许多优秀数学家，包括在伯克利任教的 J．沃尔夫本人。

丘成桐对这一问题巧妙的解决，使当时的世界数学界意识到一个数学新星的出现。丘成桐的毕业论文发表在 1971 年的《数学年刊》上。之后他与 B. 劳森合作，又给出这种流形基本群的可解子群的几何性质，他们的文章发表在 1972 年《微分几何杂志》。他们的工作及著名数学家 J. 米尔诺关于曲率与基本群大小的工作，是具非正截曲率流形基本群方面的开创性工作。

1971 年秋丘成桐在伯克利取得博士学位后，应邀前往普林斯顿高等研究院访问一年。在此期间结识了许多年轻的世界一流数学家，包括著名的美国数学家 C．费弗曼。丘成桐在这里受益匪浅，他完成了两篇论文，一篇是关于保形变换的，另一篇是关于常平均曲率子流形的，分别发表在《微分几何杂志》与《美国数学杂志》上。

1972 年秋年仅 23 岁的丘成桐，应数学教授 J. 西蒙邀请来到纽约大学石溪分校担任副教授。在石溪分校的一段时间内，他又连续完成了几篇论文. 其中至今仍具影响的是与劳森合作的关于标量典率与群作用关系的文章。1973 年暑假美国数学会在斯坦福大学举行了微分几何大会．丘成桐在会上做了三个学术报告。

除了与劳森合作的结果外，还有埃尔米特流形的性质及完备黎曼流形的函数论。在斯坦福大会上，丘成桐以卓越的能力和杰出的贡献，向数学界显示了自己在微分几何领域的领先作用。1973 年是丘成桐数学事业上十分重要的一年．他在这一年中完成了题为“完备黎曼流形上调和函数”的著名论文，在论文中巧妙地应用极值原理及辅助函数，给出了具适当曲率条件的完备黎曼流形上调和函数的梯度估计及哈纳克不等式，并由此导出非负里奇曲率的完备流形上的刘维尔型定理，即不存在非常数的正调和函数。

这篇文章是他的数学生涯中的转折点，该文奠定了他应用分析方法的基本思想及技巧。从此以后，在他的数学工作中处处可见分析方法的应用，诸如卡拉比猜测的解决、谱值下界的估计、热核估计等。

丘成桐最有影响且最重要的工作是卡拉比猜测的证明。这一猜测是由著名几何学家 E．卡拉比在 1954 年的国际数学家大会上提出的. 具体内容如下：设 M 是紧卡勒流形，ω 为其卡勒形式，给定任意表示第一陈示性类 C1(M)的实闭(1，1)型形式 ρ，则存在唯一的卡勒度量，满足：(1)其对应的卡勒形式与 ω 决定相同的上同调类;(2)其里奇形式与给定的(1，1)型形式 ρ 相同．这种卡勒度量的唯一性早在 50 年代即为卡拉比本人证明，实际上是偏微分方程极值原理的应用，但存在性一直悬而未决。

卡拉比猜测的成立等价于一类复蒙日--安培方程的可解性，由于蒙日--安培方程是完全非线性的，其求解一直是一个困难的问题。1976 年底丘成桐用强有力的偏微分方程估计解决了这一问题．其直接推论是：第一陈示性类为零的紧卡勒流形具有里奇曲率为零的卡勒度量，即里奇平坦卡勒度量；著名的 K3 复曲面上有里奇平坦卡勒度量。在此之前，除平坦环面外，人们甚至不知道任何其他的里奇平坦的紧流形．卡拉比猜测的解决在代数几何中有两个极

为重要的应用：一是关于第一陈示性类为零的紧卡勒流形的结构定理，另一个是关于平坦紧卡勒流形的拓扑刻划，即充要条件为第一、二陈示性类为零。

这些基础性结果，都是经典代数几何方法所无能为力的。丘成桐在解决卡拉比猜测的同时，还证明了负定第一陈类的紧克勒流形上卡勒--爱因斯坦度量的存在性。这一问题比卡拉比猜测要容易些，在同一年，法国数学家 T. 奥宾也独立地证明了这种存在性。

值得指出的是，该结果在复一维情形即是 J．H．庞加莱的单值化定理：在亏格大于 1 的紧黎曼曲面上，存在高斯曲率为-1 的度量，因而推广庞加莱单值化定理至任意维数。丘成桐还将其应用于代数几何，例如关于复双曲紧流形的陈示性类刻划，及其复投影空间上卡勒结构的唯一性。在复维数为奇数时，复投影空间上卡勒结构的唯一性早在 50 年代末即为 F．希策布鲁赫与小平邦彦所证明。

复维数为偶数的情形，是丘成桐用卡勒--爱因斯坦度量解决的。在复曲面情形，由小平邦彦的分类理论推知，复投影空间上任一复结构都是卡勒的，因此复二维投影空间上的复结构唯一。法国著名的布尔巴基数学讨论班，迅速介绍并且研读了他的工作。

丘成桐在 70 年代的另一重要成就，表现在对闵科夫斯基问题的研究。将欧氏空间 Rn+1 中严格凸翘曲面 M 的高斯曲率，用高斯映射移到 n 维单位球面 Sn 上，定义 Sn 上的某函数 K＞0，H．闵科夫斯基早在 20 世纪初就发现。这里 xi 为欧氏空间 Rn+1 的坐标函数。他非常关心其逆是否成立，这就是著名的闵科夫斯基问题。闵科夫斯基本人在多面体范围内解决了这一问题，苏联数学家 A. Д 亚历山德罗夫推广到一般情形。但是当 K 是光滑函数时，原凸曲面的光滑程度却未解决。二维且 K 实解析情形由 H. 卢伊于 1938 年解决。

50 年代初期，L．尼伦伯格与 A．V．波戈里洛夫分别独立地解决了二维时该问题的一般情形。其后，许多数学家试图解决高维情形，但未能如愿。最后在 1975 年丘成桐与郑绍远合作解决了闵科夫斯基问题的光滑性。他们的方法是像尼伦伯格在二维情形所作的那样，建立相应的实蒙日--安培方程解的内部正则性。丘成桐于 1976 年被提升为斯坦福大学数学教授，且为 1977--1978 年度加州大学伯克利分校特邀教授。1978 年他应邀在芬兰赫尔辛基举行的世界数学家大会上做一小时学术报告，题目为《微分几何中偏微分方程作用》，这一报告代表了 80 年代前后微分几何的研究方向、方法及其主流。

1973 年夏在美国数学会举办的斯坦福微分几何大会上，物理学家 R. 杰拉奇向数学家们讲演了广义相对论，并解说了正质量猜测。众所周知，在广义相对论中，没有像经典力学中局部质量密度的概念。但是对一个孤立的物理系统，仍然有整体质量，即这一系统的总质量。由于该质量并非局部质量密度函数在全空间的积分，物理学家们不能断定它是否一定非负，且总质量为零的时空是平坦的。

用数学语言叙述，设 V 是具有洛伦兹度量的时空，在其中类空超曲面 M 上考虑由 V 上度量限制而得的度量，假设 M 是渐近平坦的，则 M 的总质量定义为限制度量导数在无穷远球面上的积分。正质量猜测是：如果 V 是具有物理意义的时空，这一质量一定非负，且质量为零喻示 M 是平坦的。这个猜测的一个特殊情形是：给定一标量曲率为非负的渐近平坦三维黎曼流形，则它的质量非负。1978 年丘成桐和 R. 舍恩合作，首先解决了正质量猜测的这一特殊情形。

他们的定理也喻示了在三维环面上，平坦度量是唯一的具非负标量曲率的黎曼度量，其后不久，他们就解决了最一般情形的正质量猜测。设 γ 为三维欧氏空间中给定长度的约当曲线，在以 γ 为边界的所有曲面中是否存在面积最小者？这即是著名的普拉托问题。在 30 年代初，T．拉多和 J．道格拉斯分别独立地解决了这一问题。1948 年莫里解决了在一般黎曼流形中曲线 γ 的普拉托问题。70 年代左右许多优秀数学家，如 R．奥斯曼、S．希尔德布兰特、R．格利弗等证明了若给定边界曲线是光滑的，则道格拉斯--莫里解是光滑的。

然而，在 γ 满足适当凸性条件时，道格拉斯--莫里解是否是自不相交的嵌入曲面，仍有待解决。1975 年丘成桐在普林斯顿大学数学系讲演之际，通过与 C．D．帕普基里亚库波洛斯教授的交谈，掌握了一个怎样从浸入证明嵌入的拓扑技巧。几年后他与 W．米克斯合作，应用这一技巧解决了道格拉斯--莫里解的嵌入问题，该结果在拓扑学中有许多应用，如三维流形的德恩引理。后者是解决关于 S3 上群作用的史密斯猜测的不可缺少的一部分。基于上述杰出工作，丘成桐于 1983 年在华沙举行的世界数学家大会上，被授予菲尔兹奖章。

J．C．菲尔兹是加拿大数学家，逝世后将其遗产捐献给世界数学协会，设立了菲尔兹奖，用来表彰在数学上有卓越贡献的数学家，且年龄必须在 40 岁以下。由于著名的诺贝尔奖中没有数学一项，菲尔兹奖成为世界数学界中的最高荣誉。丘成桐是至今得奖者中唯一的中国人。在此以前，他当选为 1979 年度美国加利福尼亚州最优秀的科学家，1981 年获得世界微分几何界中最高奖之一----美国数学会的维布伦奖。丘成桐没有自满，不断取得新的成就特别值得提到的是，他与 K．乌伦拜克合作的关于杨--米尔斯解的工作。

杨--米尔斯方程，是由物理学家们引进的，已成为粒子物理的一部分。S．唐纳森在 1982 年的毕业

论文，使人们意识到杨--米尔斯联络对研究四维微分流形的重要性。简单地说，杨--米尔斯联络是在给定结构群的联络空间上，由曲率的平方模定义的泛函的临界点。R. 彭罗斯的扭曲理论及阿蒂亚--辛格指标定理，可以用来构造某些特殊的四维流形上杨--米尔斯方程的特解，即对称或反对称联络；C. 陶布斯用偏微分方程方法及隐函数定理在一般四维流形上构造了反对称联络。另一方面，由于 M. 纳拉斯姆罕、C. 塞斯哈德里及唐纳森等人的工作，发现在代数曲线及曲面上，反对称杨--米尔斯联络与稳定全纯向量丛一一对应。向量丛的稳定性是由 D. 芒福德于 60 年代末期引进的，最初是用来紧化向量丛的模空间，随着时间的推移，代数几何学家们发现其越来越重要。

尤其是苏联数学家博格莫洛夫的工作，喻示稳定丛具有很强的几何限制，如第一、二陈示性类间有不等式关系。因此，更进一步地刻划稳定丛是极为必要的。鉴于低维情形的稳定丛与反对称杨--米尔斯联络的对应，人们不禁要问：在一般情形，这一对应是否仍然成立？

在高维，并没有反对称联络的概念，取而代之的是杨--米尔斯--埃尔米特度量。因此在高维，人们需要证明的是：稳定丛与杨--米尔斯--埃尔米特度量一一对应。1984 年丘成桐与乌伦拜克合作，用强有力的偏微分方程估计方法，解决了这一问题。

他们的证明实际上在更广的卡勒流形上有效，且本身亦是极有意义的，可以用来研究模空间等问题，丘成桐与乌伦拜克应用这一定理给出了卡勒流形上平坦丛的刻划。1989 年夏美国数学会在洛杉矶举行微分几何大会，丘成桐作为世界微几何的新一代领导人物出任大会主席。微分几何中研究刘维尔型问题的重要性，这实际上是唯一性问题。偏微分方程的正则性问题可以视为它的形变．丘成桐的工作中渗透了许多这类性质的问题。丘成桐对中国数学一直非常关心。

1984 年起丘成桐招收了十几名中国博士研究生，为中国培养微分几何人才，田刚就是这时成为他的研究生的。田刚在 1996 年获得维布伦奖，成为世界最杰出的微分几何学家之一。田刚，1958 年 11 月生，江苏南京市人，数学家，中国科学院院士、美国艺术与科学院院士，北京大学数学科学学院学术委员会主任、教授、博士生导师，北京大学原副校长，中国民主同盟中央委员会副主席。1982 年田刚从南京大学数学系毕业后考取北京大学数学系研究生；1984 年从北京大学硕士毕业后被北京大学公派到美国哈佛大学攻读博士。

丘成桐经常运用讨论班的形式，带领学生阅读大量的数学文献，帮助学生从中领会数学的精辟之处。丘成桐的性格是非常直率的，这引起他的学生们的不理解。但湖南科技出版社 2002 年出版的《宇宙的琴弦》一书，第 257-259 页中说："1987 年，丘成桐和他的学生田刚做了一次有趣数学考察。他们发现，一定的卡--丘空间形式可以通过我们熟悉的数学步骤变换成其它形式：空间表面破裂，生成孔，然后照一定的数学形式将孔缝合起来……丘--田过程的意义在于提供了一个从已知卡—丘空间生成新空间的途径"。美国弦理论家 B·格林的《宇宙的琴弦》一书，盛赞中国科学家丘成桐和田刚师生在超弦理论上的顶端工作,这都皆因卡拉比---丘成桐空间的研究而起。

对此有人认为：不是空间出现了破裂，而是"膜"本身在翻转时对"维"的"满足"的一种表现。假如承认"能量团"存在最基本状态，那么"膜"的破裂就存在一个限度。同样，在"自组织"条件达到一定的状态时就会以"雪崩"的方式解决，也就是以"破裂"来解决"膜"的有意义演化。在解释这个问题时，丘--田也认定"破裂"是在二维状态下的现象，但是他们对这二维却认为是"经度"和"纬度"。这是数学的思考：为什么"膜"翻转的破裂一定是二维的呢？他认为，就因为只有在"膜"仅存在两个"维"----"密度"和"温度"的情况下，才需要通过"破裂"来调整"自组织"，假如出现任意第三个"维"，那么"膜"的翻转就会导致分裂，而不是破裂。破裂可以修补，分裂不需要修补。破裂是为了"满足"基本条件，而"分裂"是对"满足"的重复。

对此我们说：丘成桐的智慧及田刚的正确性，不在他说的"自组织"。更为需要的是 1963 年前"柯召--赵华明--魏时珍猜想"，想的证明的"空心圆球不撕破和不跳跃粘贴，能把内表面翻转成外表面"难题的接地气----这是 59 年后的今天，全球面对来势汹汹的突发新冠疫情才知道的----封城、隔离……原先能召开的重要的领导人大会，如今他们最好的办法是召开"视频连线"会议----在隔离的两个或多个空间中，能互通信息----类似"空心圆球不撕破和跳跃粘贴，能把内表面翻转成外表面"。

【5、汉密尔顿--田刚出场】

到这时汉密尔顿--田刚该出场了。美国弦理论家 B·格林的《宇宙的琴弦》一书，盛赞中国科学家丘成桐和田刚师生在超弦理论上的顶端工作，这都皆因卡拉比--丘成桐空间的研究而起。这非常值得中国人骄傲----卡拉比--丘成桐空间是第一陈省身类为零的一种卡勒流型----中国科学家陈省身、丘成桐和田刚形成的三代人梯，已经登峰地冲上了世界前沿科学的顶层，受到西方同行的注目和赞扬，这是千载难逢的好事，应该极为珍惜，不应给予丝毫的损害。

因为弦理论家们发现，弦理论中多余的维度应该卷曲成卡拉比--丘成桐空间的形状，他们还计算出一些对弦振动模式产生影响的结果，使卡拉比--丘成

桐流形身价大增。而典型的卡拉比--丘成桐空间都包含着洞，这就联系着环面。为纯数学理由研究的卡拉比--丘成桐空间，与现在的弦理论的紧密联系。还有丘成桐和他的群体，根据田刚等数学家的重要成果，从数学上严格证明了用来计算卡拉比--丘成桐空间能放多少个球的公式，解决了几百年的数学大难题。1987 年丘成桐和田刚发现一种翻转变换操作，使一定的卡拉比--丘成桐空间形式可以变换成其他形式。例如想象把皮球的表面收缩到一点，使空间结构破裂，在破裂的卡拉比--丘成桐空间尖点，再“翻转”生成另一个球面。这与庞加莱猜想是紧密联系的----也接近“柯召-赵华明-魏时珍猜想”，即“柯猜弦论”，或叫“庞加莱猜想外定理”。

因为按庞加莱猜想正定理，开弦能收缩到一点，等价于球面。但球面反过来扩散，却不能恢复成开弦；按庞加莱猜想逆定理，闭弦能收缩到一点，是曲点，等价于环面。但环面反过来扩散，曲点却能恢复成闭弦。这使超弦理论发生对称破缺。超弦理论在四维时空中的具体物理预言，与紧致空间的结构有关。卡拉比--丘成桐空间能够预言紧致空间的具体结构，但它联系超弦理论预言的卡--丘流形，还有三大问题：（a）弦理论解决了物质族分 3 代与卡--丘流形 3 孔族的对应，但仍有如何排除多孔选择的难题；（b）弦理论解决了多基本粒子与多卡--丘流形形状变换的对应，但仍有如何排除多种形状选择的难题；（c）弦理论解决具体的基本粒子的卡--丘流形图形虽有多种数学物理手段，但也遇到选择何种数学物理原理为佳的难题。

正是在这一关节点上，三旋理论为解决弦理论中的这三大难题提供着新思路。这说明在丘成桐和田刚这类被国外的“上帝”造就的中国人才之外，我国本土的“上帝”，已能造就人才。这使丘成桐和田刚的策略有了可比性，也都有合理性----“柯猜弦论”揭示未来百年之大变局，是 1963 年研究按下“暂停键”，之前没有出书，也没有宣传，57 年后的 2020 年突如其来的新冠肺炎疫情，“封城”、“锁国”隔离……疫情催生大量“云端见”常态化----网络会议、在线教育、线上会展，大数据智能、群体智能、跨媒体智能、人机混合增强智能和自主智能系统等人工智能方面的发展方向证明：类似“空心圆球内表面翻转成外表面”，还可以“不撕破”----类似还有“科统”。

正是在 1963 年之后 59 年中，“柯猜弦论”对事物的发展探索，明白“翻转”为啥从“超弦”链接到“智能”----人工智能，可以在类似“空心圆球内表面翻转成外表面”的过去百年之大变局中，呈现的“撕破”和“不撕破”两难之间作选择，要求柯召--赵华明--魏时珍猜想不能丢。由此类似郎兰兹纲领这项伟大的数学工程，要在孤岛和岛屿间架桥梁，或者买卖“毛坯房”，遇到 2020 年这种突如其来的新冠肺炎疫情“封城”、“锁国”隔离，类似的孤岛和岛屿，就有人类社会、物理空间、信息空间所构成的三元空间转变。

丘成桐和哈密尔顿是朋友。田刚和哈密尔顿也是朋友。而田刚和佩雷尔曼类似朋友时，哈密尔顿却和佩雷尔曼是竞争对手。佩雷尔曼 2006 年获菲尔兹奖和“千禧年数学大奖”，与田刚和摩根一起合著解读佩雷尔曼证明的新书有关----没有人肯定你的证明是不能获奖，而田刚和摩根的解读，又是美国克雷数学研究所为判定评奖专题资金支助的项目。佩雷尔曼获奖被肯定后，哈密尔顿和田刚也许有过长时间的讨论后，两人才达成共识：佩雷尔曼证明了庞加莱猜想正定理和庞加莱猜想逆定理，但还没有完成庞加莱猜想外定理的证明----类似柯召--赵华明--魏时珍猜想说的空心圆球内外表面及翻转----2006 年的时候“柯召--赵华明--魏时珍猜想”还没有揭秘，虽然已经等待了 43 年，所以我们就用“哈密尔顿--田刚猜想”来谈论他们的这场共识。

2020 年公开的陈秀雄、王兵对“哈密尔顿--田刚猜想”的证明方法，也与 2007 年出版的《求衡论---庞加莱猜想应用》一书公开的对“庞加莱猜想外定理”的证明方法有不同。哈密尔顿所做的，本质上是将庞加莱猜想转变为一个超级的数学奥林匹克问题。在某种意义上，哈密尔顿挫了这一猜想的锐气。而佩雷尔曼证明了两件主要的事情：其一，他证明了哈密尔顿其实不需要假设曲率将一致有界；在证明展开的想象空间中，这种情况将总是成立的。

其二，他表明了所有将会产生的奇点都是同源的；在曲率开始“爆炸”，变得无法控制时，它们将会出现。既然所有奇点都具有同一本质，对于它们有一个有效的工具----哈密尔顿首先设想的手术将完成这一工作。另外，佩雷尔曼证明了哈密尔顿假设的一些奇点将永远不会产生。但哈密尔顿和佩雷尔曼都还类似旧物理脑洞大开。

那么新物理脑洞大开是什么？是里奇流吗，它又和里奇张量有什么关系？里奇张量是列维•齐维塔的老师、意大利微分几何学家里奇，研究黎曼张量发展的张量简并方法。新物理脑洞大开是 1989 年彭罗斯在出版的《皇帝新脑》一书中，第一次解释里奇张量为，是当一个物体有被绕着的物体作圆周运动时，被绕物体整体体积有同时协变向内产生类似向心力的收缩作用。即里奇张量是圆周运动的数学进化和物理射影，圆周运动联系球面自然是正曲率。

据此再看哈密尔顿把里奇张量联系正曲率，换为里奇流设想：因为庞加莱猜想要求任何维度的球面，都具有一个不变的正曲率。如果能够找到一个测量无法识别且无法想象的三维小圆块的方法，再将这一个小圆块进行变形，与此同时不断测量它的曲率，那么曲率将最终为正并恒定不变，而这一小圆块最终将被确定地证明为一个三维球面。这意味着这

一小圆块一直就是一个球形，因为变形实际上并不改变物体的拓扑性质，只是使物体变得更容易识别。而早在 1982 年，美国数学家瑟斯顿就提出，每一个三维空间都只可以分成八种几何对应部分的几何化猜想，但他证明不了自己的猜想。

哈密尔顿联系里奇张量命名的"里奇流"，以物理学中的热方程为模型，可写成几何演化方程。这样在三维中，里奇流的"颈"有时会被拉断，于是把空间分成具有不同特定几何的部分。但在里奇流上，汉密尔顿还是未能处理好奇点问题。原因是转换哈密尔顿写的方程中，描述度量过程的里奇流联系的要害不但有"收缩"，还有对应类似"空心圆球不撕破和不跳跃粘贴，能把内表面翻转成外表面"证明的"赵正旭难题"----或叫 "柯召--赵华明--魏时珍猜想"，或叫"庞加莱猜想外定理"，或叫"柯猜弦论"。

也许正是"柯猜弦论"47 年间的"保密"，歪打正着"保护"了新时代的"科统"----这可联系理解 1992 年佩雷尔曼到美国纽约的柯朗数学研究所读博士后，他在这里不但解决了困扰数学界 20 年的难题"灵魂猜想"，后来能解决庞加莱猜想，也一点也不奇怪。一是类似"灵魂"、"灵魂猜想"的问题，在"武统"、"文统"的声浪中争论是很大的。"赵正旭难题"既然是从川大流出，也许 47 年间也有耳闻流入 1982 年田刚毕业的南京大学。田刚在美国读博期间，佩雷尔曼于 1992 年访问美国。在纽约大学佩雷尔曼在普林斯顿认识 1958 年生在南京大学的田刚后，田刚和佩雷尔曼的母亲都是教数学的，很谈得来。每星期他们一起开车去普林斯顿参加高等研究院的讨论班。佩雷尔曼接触到了美、中等国数学家，他因能体会"灵魂猜想"与类似"赵正旭难题"的"磨难"，也是他们正在用"里奇流"，攻关拓扑领域的难题庞加莱猜想的超级信息。

【6、汉密尔顿--田刚与里奇--庞加莱有啥联系】

"里奇流"等为啥能翻新电子、原子、分子等显概念？这也如说要把"庞加莱猜想"、"里奇流"拿来，在中国造响，也许也有俄国年青数学家佩雷尔曼的功劳：这是一场歪打正着的"爱国"误会----2006 年 6 月丘成桐院士回国，宣传支持的中国年青数学家朱熹平和曹怀东两教授，与佩雷尔曼争夺"庞加莱猜想"证明发生纰漏，国内部分科学家及其追随者跟国外一齐喝倒彩，使得"庞加莱猜想"被证明的方法的"里奇流"概念响亮，得以披露。那么佩雷尔曼用的"里奇流"概念，与彭罗斯用的"里奇矢量"概念有没有联系呢？当然有。

而且涉及中国、美国、俄国和法国的数学家近一百年来合作竞争。特别意外的是，2020 年 11 月 9 日《光明日报》和 11 月 16 日"新华每日电讯"等媒体报道：中国科技大学陈秀雄、王兵两位教授证明了"哈密尔顿--田刚"和"偏零阶估计"这两个国际数学界 20 多年悬而未决的核心猜想，赞誉如潮。其实这是 2006 年公开佩雷尔曼证明了"庞加莱猜想"14 年后，推动"柯猜弦论"的又一个好消息。

1884～1894 年里奇通过研究黎曼、李普希茨以及 E.B.克里斯托费尔微分不变量的理论，萌发绝对微分学（现称张量分析）的思想；到 1896 年他发表内蕴几何学的论文，使用了绝对微分学概念，进而提出缩约张量（里奇张量）的概念，成为当今新脑洞理论物理的重要工具。但因还不明快，1900～1911 年里奇和他的学生 T.列维--齐维塔推动这一学科的发展产生分支，为爱因斯坦在广义相对论中选用了里奇理论后，才为里奇张量后来受到彭罗斯等重视，埋下种子。

曲折的是，里奇的张量"收缩"思维，到 1904 年影响到了法国大数学家庞加莱(1854--1912)提出了一个拓扑学的猜想："任何一个单连通的，闭的三维流形一定同胚于一个三维的球面"。简单的说，单连通就是这个空间中每条封闭的曲线都可以连续的收缩成一点，或者封闭的三维空间每条封闭的曲线都能收缩成一点，就一定是一个三维球面。庞加莱不但是数学家，而且是天体力学家、数学物理学家、科学哲学家。他提出的庞加莱猜想是美国克雷数学研究所悬赏的七个千禧年大奖难题其中的三维情形----即被俄罗斯数学家佩雷尔曼于 2003 年左右证明，在 2006 年数学界最终确认佩雷尔曼的证明解决的庞加莱猜想。庞加莱 1904 年提出这个猜想后，他一度认为自己已经证明了它。但没过多久，证明中的错误就被暴露了出来。

于是，拓扑学家们开始了证明它的努力。但在 20 世纪 30 年代以前的研究只有零星几项，直到英国数学家怀特海一度声称自己完成了证明，但不久就撤回了论文。当然他在这个过程中，发现了三维流形的一些有趣的特例，这些特例被称为怀特海流形。20 世纪 30 年代到 60 年代之间，又宣称解决了庞加莱猜想的，有著名的宾（R.Bing）、哈肯、莫伊泽和帕帕奇拉克普罗斯等。希腊数学家帕帕奇拉克普罗斯是 1964 年的维布伦奖得主，然而这位聪明的希腊拓扑学家，却最终倒在了庞加莱猜想的证明上----直到 1976 年去世前，帕帕仍在试图证明庞加莱猜想。然而帕帕奇拉克普罗斯临终之时，把一迭厚厚的手稿交给了一位数学家朋友，那位数学家就发现了错误，但为了让帕帕安静地离去，最后选择了隐忍不言。

这一时期拓扑学家对庞加莱猜想的研究，一次又一次尝试的失败，使得庞加莱猜想成为出了名难证的数学问题之一。转机是在 1961 年的夏天，在基辅的非线性振动会议上，斯梅尔公布了自己对庞加莱猜想的五维空间以及五维以上的证明，引起轰动，由此获得 1966 年菲尔兹奖。1983 年美国数学家弗里德曼又将证明向前----在唐纳森工作的基础上证出了

四维空间中的庞加莱猜想，并因此获得菲尔茨奖。

有人又想到研究三维庞加莱猜想的工具，数学家瑟斯顿就是其中之一----瑟斯顿应用其他的工具，引入了几何结构的方法对三维流形进行切割，并因此获得了 1983 年的菲尔茨奖。俄罗斯数学家佩雷尔曼在前人的基础之上，又花费 8 年的时间去研究和证明三维的庞加莱猜想。丘成桐院士说，向世界上最优秀的拓扑学家发出挑战的庞加莱猜想，不难理解："单连通的三维闭流形同胚于三维球面"----不用严格的数学方法，这个庞加莱猜想可以这么证明：如果我们用可伸缩围绕一个苹果表面的橡皮带，就可以既不扯断它，也不让它离开表面，能使它慢慢移动收缩为一个点。反证法是，如果我们想象同样的橡皮带，以适当的方向被伸缩在一个轮胎面上，那么不扯断橡皮带或者轮胎面，是没有办法把它收缩到一点的。

这就是说，苹果类似的三维球面表面才是"单连通的"，而轮胎面类似的三维环面不是相同的拓扑类型，从而得证任何一个封闭的三维空间，只要它里面所有的封闭曲线都可以收缩成一点，这个空间就一定是一个三维圆球。显然这是一个很基本的问题。丘成桐感叹道："匿名人士批评中国人的研究全是二流研究，是因为中国人看不起中国人"。而丘成桐的爱国热情，就是要在 14 亿人中，找类似的"高等生物的种子"。熊庆来找到华罗庚，华罗庚找到陈景润，说明有这类种子。陈省身找到他丘成桐，他丘成桐找到田刚，也说明有这类种子。这也正是在 1966 年美国的斯梅尔证明五维以上的庞氏猜想获得菲尔茨奖，和 1983 年美国的弗里德曼证明四维庞氏猜想获得年菲尔茨奖之前后，丘成桐在他 30 多岁证明了卡拉比猜想之后的事。

因为他通过证明卡拉比猜想创立卡--丘空间，逐渐认识到庞加莱猜想空间的基本性。斯梅尔和弗里德曼获菲尔茨奖，无疑更刺激了丘成桐的萌动。田刚院士 1982 年从南京大学数学系毕业后考取北大数学系研究生，师从张恭庆教授。田刚 1984 年获北大硕士学位后，赴美留学投到丘成桐教授门下，跟随哈佛大学的丘成桐教授攻读博士。

【7、平均曲率流--里奇流--里奇曲率流】

里奇流是一种描述空间演化的微分几何学研究工具。1982 年由哈密尔顿在文献中首先引入。在文献中，哈密尔顿利用里奇流，分别分类了具有正里奇曲率的 3 维流形和具有正曲率算子的 4 维流形。1993 年哈密尔顿又在文献中引入了里奇流手术，并且提出了解决庞加莱猜想和几何化猜想的提纲。

在微分几何里，里奇流是一个内蕴的几何流。它是模仿热扩散的方式在黎曼流形上变化其度量，去掉度量的非正则化，最终里奇曲率流将得到一个高斯曲率处处相等的黎曼度量。

里奇流最初由哈密尔顿引入以研究具有正里奇曲率的紧致 3 维流形。而在经过许多数学家数十年的研究后，里奇流现已被广泛用于研究有关流形的拓扑，几何和复杂结构。特别是哈密尔顿过去 20 年的基础工作，以及佩雷尔曼对庞加莱猜想的证明，使里奇流成为了几何分析中最复杂，功能最强大的工具之一，在为著名的庞加莱猜想提供了重要的解决方案后，现还被中国数学家用来解决了哈密尔顿-田刚猜想和偏零阶估计猜想，这些均为几何分析领域的核心猜想。

哈密尔顿--田刚猜想等微分几何学两大猜想被成功证明的意义，在于"平均曲率流"（mean curvature），这是微分几何中一个"外在的"弯曲测量标准，局部地描述了一个曲面嵌入周围空间（比如二维曲面嵌入三维欧几里得空间）的曲率。平均曲率是空间上曲面上某一点任意两个相互垂直的正交曲率的平均值。如果一组相互垂直的正交曲率可表示为 K1,K2,那么平均曲率则为：K=(K1+K2)/2。

曲面的两个主曲率之积 K=k1k2 叫曲面的高斯曲率，两个主曲率的平均值 H=(K1+K2)/2,叫做曲面的平均曲率。一个曲面是极小曲面当且仅当平均曲率为零。此外，平面 S 平均曲率满足一个热型方程称为平均曲率流方程。对 3 维空间中的曲面，平均曲率与曲面的单位法向量相关：在流体力学中使用的另外一种定义是不要因子 2：

$$Hf=(k1+k2) \qquad (7\text{-}1)$$

这出现于杨--拉普拉斯方程中，平衡球状小滴内部的压力等于表面张力乘以 Hf；两个曲率等于小滴半径的倒数。一个极小曲面是所有点的平均曲率为零的曲面。经典例子有悬链面、螺旋面等。极小曲面的一个推广是考虑平均曲率为非零常数的曲面，球面和圆柱面就是这样的例子。球面是惟一具有常平均曲率且没有边界或奇点的曲面；如果允许自交，则存在平均曲率为非零常数的闭曲面。

平均曲率流是体积的负梯度流，它使超曲面沿体积下降最快的方向流动。它粗略的可看成极小子流形的抛物版本，可用来研究极小子流形，甚至低维拓扑等领域的问题。该流在材料科学中已使用、研究了近百年，用于模仿事物，如细胞、谷粒、气泡的增长。

平均曲率流最重要的问题之一是研究流的奇点。掌握流在奇点附近的结构和它的奇点集的结构是很困难的。尽管如此，人们对平均凸和仅有"一般性"奇点的流已有重要的认识，并提出了很多相关的值得研究的问题。作为奇点模型，自相似解在研究流的奇点中有重要的作用。人们对超曲面定义了几何量：熵，并在如何分类具有小熵的自收缩解上已取得了几个出色的结果，但仍有很多值得研究的地方。

运用平均曲率流，人们证明了面积极小的锥的密度的最优下界，并给出了一类边界映照下极小曲

面方程组的狄里克雷问题的经典解。该流还可以用来研究很多相关问题。我们先研究奇点模型：自相似解，这对了解流的奇点有重要的意义。我们通过高斯映照、第二基本型的模长研究了自收缩解的刚性特征，得到了几个最优的刚性定理。通过平均曲率流自膨胀解研究了正则锥的扰动，特别是非面积极小的极小锥有正平均曲率光滑超曲面扰动；作为应用，可以研究非面积极小的极小锥的密度的无维数最优下界。关于全平均曲率的概念，已被陈邦炎等推广到高维子流形上平均曲率流,平均曲率,平均能流密度,平均出流概率,平均能量流,曲率半径,曲率驱动,高斯曲率,曲率引擎,时空曲率，以曲线演化为基础的方法成为图像处理领域的一个研究热点。

考察曲线的平均曲率流,分析正负曲率对曲线演化的影响,引入像素相似度,设计一种模糊规则实现正负曲率是：

（1）在线条点部分，该点扩散方向与梯度方向正交，即沿着边界轮廓方向，不会造成边界模糊，扩散和位移。但在区域间进行这种扩散也会拉长噪声点形成絮状环绕分布的整个图像上。

（2）在角点部分，这种正交于梯度方向的扩散会导致凸角点趋于圆滑，同时凹角点被填平，导致活动轮廓无法准确勾勒角点。

还有一种一个在区域间平滑处理,去除噪声而尽可能保留边缘部分和角点信息的平均曲率流扩散和各向异性扩散相结合的梯度向量流计算模型。用分析的方法研究这几类几何偏微分方程，首先系统研究里奇流，里奇曲率流----里奇曲率，本质上就是包含的平面的曲率平均。也就是说最初是圆形（或者是球形）放射状的圆锥会扭曲未椭圆形状，沿着主轴的弯曲是相互相反的作用，而且有把体积变为零的可能性。在物理的应用，一定要变零的切断曲率的存在并不一定是局部性一定有什么质量。世界线圆锥最初的圆形的横切面是，要是变成了后来体积没变化的椭圆，这个效果就是来自其他位置的质量的潮汐效果。在微分几何中，类似度量张量，里奇张量也是一个在黎曼流形每点的切空间上的对称双线性形式。

以格雷戈里奥•里奇--库尔巴斯托罗为名的里奇张量或里奇曲率张量，提供了一个数据去描述给定的黎曼度规所决定的体积究竟偏离寻常欧几里德 n-空间多少的程度。粗略地讲，里奇张量是用来描述“体积扭曲”的一个值；也就是说，它指出了 n-维流形中给定区域之 n-维体积，其和欧几里德 n-空间中与其相当之区域的体积差异程度。离散曲面的里奇曲率流理论,证明了离散解的存在性和唯一性。

【8、再论哈密尔顿--田刚猜想等数学】

2020 年中国科技大学陈秀秀、王兵两位数学家，证明了“哈密尔顿-田刚猜想”和“偏零阶估计猜想”，属于数学里面的微分几何领域。微分几何就是用微积分去研究几何的性质。在普通人看来，几何就是方块、三角形、圆形以及各种曲线。把一条抛物线无限放大，抛物线线段上的一段无限小的线段具有什么性质？这就是微分几何研究的问题。这个问题看起来很无聊，但是实际上很有用。

我们知道一根直的钢丝可以把它弯成一段弧，一张 a4 纸也可以从平面状态弯成曲面状态，但是打开以后都可以摊平。然而如果把一个篮球从中间破开，无论如何也无法用平面的方法来度量球的面积，因为球面是没有办法摊平成平面的。那么这种摊的平和摊不平，要用什么方法来描述呢？这就只能用微分几何的方法来描述。

这说明一维是可以弯曲的，二维平面也可以弯曲的，那么我们要问一个问题，三维空间可不可以弯曲？从理论上来讲是可以弯曲的，并且可以推广到 N 维空间。这种无聊、看起来很枯燥的学问，代表了这个世界运动规律的本质----我们肉眼能够直观看到的东西，都属于维度和直观物理量。比如说线的长度，这个我们可以量出来，也可以看到。X×Y=面积，X×Y×Z=体积，这些直观的和肉眼能够看到的东西只是存在性，而不代表它们的规律。

弹道曲线的规律在于 2 次方，这个 2 是没办法用肉眼看到的。

如果自然规律肉眼可见，我们还要科学家干什么？为什么绝大多数股民都在亏损？因为股票的技术指标，全是肉眼可见的一维存在性：价格和时间，以及价格和时间的四则运算。这些看得见的，永远不代表规律。而微分几何就是研究这些几何形状内在的、看不见的规律。

广义相对论就需要用到微分几何，才能计算出空间在引力场的作用下弯曲的情况。高斯开创了微分几何，黎曼将微分几何推广到任意维度空间，爱因斯坦用广义相对论证明了微分几何的实用价值。所以光线在弯曲的空间中也会发生弯曲，在天文学观测中可以看到被太阳遮挡住的恒星。而且，因为空间的几何性质发生了改变，所以时间也会因此而变化。我们手机上的“全球定位系统”（GPS）信号，就需要用到广义相对论和狭义相对论的双重修正。

黑洞内部就有很复杂的空间几何结构。有人说：一个国家科学基础的深度和广度，完全取决于有多少个数学家在这个最枯燥的领域里面完成的成果。目前世界的数学中心在美国。美国的科学之所以是世界第一，就是因为美国养了很多做这些无聊事的科学家，具体的说他们大部分都集中在普林斯顿。目前中国的数学水平在世界上不算是最差，也不算是最好，在东亚比日本稍微落后一点。虽然中国的人口 10 倍于日本，但是数学家的数量却没有达到相应的比例。

这次陈秀雄等中国数学家证明的两个猜想，是

一项非常振奋人心的结果。菲尔兹奖虽然是数学里的顶级奖，但是有年龄上的限制，必须授予 40 岁以下的年轻数学家。所以有些数学家虽然做出了非常大的贡献，超出了 40 岁，也没有得到菲尔兹奖。怀尔斯证明费马大定律，足足用了 10 年的时间，演算草稿用了 500 页，期间经历了无数的曲折。证明完成之时，怀尔斯已经超过 40 岁了，不过后来菲尔兹奖委员会给了他一个特别的奖。陈秀雄、王兵两位科学家证明的两个猜想，用的时间也相当长，撰写证明过程花了 6 年时间，送到期刊社审稿又花了 5 年时间。因为里面很多新的方法和思想，审稿的科学家要理解并且验证过。由此可见，科学探索的道路是多么的艰深。

微分几何学可以描述空间的性质，但是并不是所有空间都是可能在物理中真实存在。人类最关心的是宇宙空间的性质，需要用哪一类几何学去描述，在这个问题上，物理学和数学就会产生交集。

微分几何和另外一个数学领域“拓扑学”紧密相连----拓扑讲的是事物连续变化而性质不变的一门学问。如果一个事物的拓扑性质不变，那么它的本质就没有改变。我们说为什么 5G 网络是一次巨大的飞跃，就是因为它改变了网络的拓扑结构。也正因为如此，让人们认识到 5G 网络真正的优势也不是很容易。这就好像汽车虽然取代马车是一种趋势，但是刚刚出来的时候，汽车的性能肯定比不上一辆马车。

中国数学家做出的这两个证明，是对数学领域的巨大贡献，它的价值不能完全用一个数学奖来表示。中国的经济要自循环，必须在自主创新的基础上消除内卷化倾向。而自主创新的核心，就是在数学上深耕深耕，再深耕。《上帝的方程式》一书认为，爱因斯坦不懂里奇张量，理由是说爱因斯坦 1912-1915 年间才向朋友、同学格罗斯曼和同事皮克教授等请教里奇张量，其实这都是爱因斯坦先主动提起研究里奇张量的。历史最后证明，正因为爱因斯坦追求的是里奇张量的严格证明和具体应用，皮克与格罗斯曼等很多人，又都先后跟爱因斯坦分道扬镳。因为很多人是华而不实，是在表皮上对里奇张量津津乐道。

纽约州立大学石溪分校终身教授、清华大学丘成桐数学科学中心访问教授、计算共形几何创始人顾险峰教授有一段精辟论述，他类似说：里奇张量与庞加莱猜想，本身异常抽象而枯燥，如单连通的闭 3-流形是三维球面，似乎没有任何实用价值。但是为了证明庞加莱猜想，人类发展了瑟斯顿几何化纲领，发明了哈密尔顿的里奇曲率流，深刻地理解了三维流形的拓扑和几何，将奇异点的形成过程纳入数学的视野。这些基础数学上的进展，必将引起物理数学信息学实用技术领域的“雪崩”。比如里奇曲率流技术，实际上给出了一种强有力的方法，使得可以用曲率来构造黎曼度量。

里奇曲率流属于非线性几何偏微分方程，里奇流的方法实际上是典型的几何分析方法，即用偏微分方程的技术来证明几何问题。庞加莱猜想的证明是几何分析的又一巨大胜利。当年瑟斯顿提倡用相对传统的拓扑和几何方法，如泰西米勒理论和双曲几何理论来证明，也有数学家主张用相对组合的方法来证明，最终还是几何分析的方法拔得头筹。哈密尔顿的里奇流是定义在光滑流形上的，在计算机的表示中，所有的流形都被离散化。因此，需要建立一套离散里奇流理论来发展相应的计算方法。顾险峰教授等建立的离散曲面的里奇曲率流理论，证明离散解的存在性和唯一性。因为几乎所有曲面微分几何的重要问题，都无法绕过单值化定理。离散曲率流的计算方法显示离散里奇流算出的封闭曲面和带边界曲面的单值化。

本质上现实生活中所有可能的曲面，都被共形地映到了三种标准曲面上，球面、欧氏平面和双曲平面。这意味着，如果发明一种新的几何算法，适用于这三种标准曲面，那么这一算法也适用于所有曲面。因此，离散曲率流的技术极大地简化了几何算法设计。

彭罗斯在《皇帝新脑》《时空本性》和《通往实在之路》等书中，非常直观明白作的标准统一解释是：

a）韦尔(Weyl)张量，是囊括类似平移运动的相对加速度，在单向的对球面客体的拉长或压扁作用。这与直线或不封闭曲线运动的牛顿力学和韦尔曲率的潮汐形变等对应。

b）里奇（Ricci）张量，是当球面客体有被绕着的物体作圆周运动时，整体体积有同时向内产生加速类似向心力的收缩或缩并、缩约作用。即里奇曲率有体积减少效应。但这里也可以理解为：里奇张量使体积减少是一种协变效应，这种奇妙似乎也包含了韦尔张量。即在只对应一处时，也类似牛顿引力在地球的潮汐效应。

韦尔张量的韦尔是测量类似自由下落的球面的潮汐畸变，即形状的初始变形，而非尺度的变化。里奇张量的里奇是测量类似球面的初始体积改变，这与牛顿引力理论要求下落球面所围绕的质量，和这初始体积的减少成正比相合。即物体的质量密度，或等效的能量密度（$E=mc^2$），应该和里奇张量相等。彭罗斯的韦尔张量和里奇张量的标准统一解释，实际整合了爱因斯坦学派的广义相对论与和量子力学的统一。爱因斯坦对里奇张量的知晓和学习应用探讨，起源于 1894 年爱因斯坦的父母移居意大利，1895 年爱因斯坦第一次考大学失败，到意大利探望父母期间认识里奇，由此接触里奇张量。1896 年爱因斯坦正式考入大学就读，围绕里奇张量的体缩效应开始广泛地自学有关数学，如结合关注黎曼和洛伦兹的数学成果：

R_uv-（1/2）g_uv R=-8πGT_uv （8-1）

对（8-1）式，彭罗斯的推证说，在物理、力学中如何针对具体问题构造这个泛函，在物理、力学问题有不同的数学信息学编辑技术。看原子核内质子量子色动化学构成的卡西米尔平板间的量子起伏，产生的收缩效应引力，这属负能量作用力，发出的引力介子属于虚数超光速粒子。但对星球间的里奇张量收缩效应，发出的引力介子是分成经典的光速传输，和量子信息隐形虚数超光速传输两部分，这把回旋被绕的星球也分成了两半。一半是对着回旋的卫星，类似属韦尔张量的牛顿引力是经典的光速传输；另一半是背着回旋的卫星，由于里奇张量整体收缩效应，逼迫这一半需要量子信息隐形传输的虚数超光速引力介子，两半收缩才能同步。

由此方程式 R_uv-（1/2）g_uv R=-8πGT_uv 可理解为：左边第一项 R_uv 里奇张量，属全域整体收缩效应的作用量。其余式中 R 是里奇张量的迹；g_uv 是对距离测度的空间几何度量张量；G 是牛顿引力常数；T_uv 是刻画能量、动量和物质性质的张量；1/2、8、π 是数。左边第二项（1/2）g_uv R，实际代表针对背着回旋卫星那一半星球的里奇张量收缩效应的作用量。等式右边的 8πGT_uv，实际属可计算和测量的引力作用量；其负号代表引力方向作用向球心，而不是向外。我们说方程（6-1）能作为量子引力精准公式来计算运用，也是从 2006 年庞加莱猜想获证以后才认识到的。

因为要真正弄懂方程（8-1），首先必须弄懂庞加莱猜想证明的全部推导。而且它的证明涉及微观领域，这正是量子引力的地方。《量子引力研究简史》一文第一条就说：1904 年法国科学家庞加莱提出庞加莱猜想，奠定了当代前沿科学的数学基础。即正猜想的收缩或扩散，涉及点、线、平面和球面；逆猜想的收缩或扩散，涉及圈线、管子和环面；外猜想的空心圆球内外表面及翻转，涉及正、反膜面和点内、外时空。这标志着传统科学的结束，革命科学的开始。

这项工作链，是从 1963 年赵正旭老师从川大数学系毕业分配到今天中国科技城绵阳市的盐亭县中学当老师，传授赵正旭难题“不撕破和不跳跃粘贴，能把空心圆球内表面翻转成外表面”开始的。后来知道这道难题跟庞加莱猜想有关，已经 53 年过去。从随着佩雷尔曼 2006 年证明庞加莱猜想获得菲尔茨奖，可以看到里奇张量能推证庞加莱猜想；庞加莱猜想定理能推证四色猜想；四色猜想定理能推证夸克的色禁闭。而反过来夸克色禁闭的四色猜想定理，能推证“暗物质和暗能量”就储藏装在原子核质子和中子的“口袋”里。因为自旋作为量子色动语言学，被看成编码，是一种量子符号动力学的“任意子”。

【9、韦尔张量到里奇张量效应之谜】

爱因斯坦的方程 R_uv-（1/2）g_uv R=-8πGT_uv，本身是完整的，也是对的。但爱因斯坦当时还只理解宏观的里奇张量，还不了解微观也能作为量子引力精准公式来运用计算。这是时代的局限。彭罗斯在巨著《通向实在之路》一书中，提出直线联系的韦尔张量引力效应，和圆周运动联系的里奇张量引力效应等两种结合的数学物理方案，已经很好解决了虚数超光速的量子纠缠引力信息隐形传输，和以光速传输为准的引力整体收缩的统一难题。

即从线性迭加向非线性点内空间和虚数的转折，正是 20 世纪开头创新的量子论和相对论，在开这个头。但再开这个头的，首先是德国数学家韦尔（Weyl，外尔，魏尔，1885–1955）。早在 1913 年他发表的著作《黎曼曲面的概念》，第一次给黎曼曲面奠定了严格的拓扑基础。20 世纪初微积分运算，求积分光滑连续的曲线要微分就有间断，反过来与微分的计算要求光滑连续有矛盾。对此认识，于是韦尔把积分线段中的间断，拟设用“相因子”衔接，成为规范场论。此时韦尔的“相因子”还是实数。到 1954 年杨振宁和米尔斯，才把规范相因子发展到复数，称为“非阿贝尔规范论”。但非线性转折点内空间和虚数，韦尔对此的理解还是漫长的。

1918 年至 1919 年韦尔在苏黎世的瑞士联邦工业大学教书时，发表了三篇文章，试图将电磁力纳入引力几何理论的框架。这就是规范理论的开端。联系微积分与不可积因子----微积分虽与无穷小有联系，但注意的重点，微分在于求两个无穷小量之比的极限，积分在于求无穷小量总和的极限，这两者后来都容易使人忽视微分对运动界面变化的揭示。例如，设 M0 是曲线 L 上的一个定点，M1 是动点，引割线，当点 M1 沿曲线 L 趋近 M0 时，割线 M0M1 的极限位置 M0T 就成曲线 L 在点 M0 处的切线。无穷小量使曲线变成了切线，这个界面的变化，同样反映在速度上，即路程在时间的无穷小分割中变成了速度界面，速度在时间的无穷小分割中变成了加速度界面，这是多么不同寻常的深刻变化。其次，微积分求解都要求函数反映的曲线是连续的和光滑的，但其实在微观领域的观察，曲线并不是那么光滑和连续。

韦尔的统一场论研究表明，在无穷小的空间，存在不可积因子。他指出：一个真正的无穷小几何必须只承认一个长度从一点到与它无限靠近的另一点转移的这一原则。这就禁止我们假定在一段有限的距离内，长度从一点转移到另一点的问题是可积的，尤其是当方向的转移问题早已证明是不可积时更不能这样假定。这样，不可积标量因子的想法便产生了，电磁势 A i 也由此产生，于是韦尔的理论可以把电磁学在概念上纳入一个不可积标量因子的几何想法之中。我们从麦克斯韦的电磁场理论可以知道：变化的磁场产生电场，变化的电场产生磁场，变化的电场和

磁场总是相互联系，形成一个不可分离的统一的场。这同模糊数轴的无穷小量数环、数旋现象是多么相似。

里奇和其学生列维-齐维塔虽是意大利数学家，但引力使光弯曲，在爱因斯坦之前的 1801 年，德国天文学家佐尔德纳就有这种想法的论述。出现处理时空弯曲的里奇张量分析，是 1851 年德国人黎曼和导师高斯已给出了方向，因此 1884～1894 年里奇能通过研究黎曼张量等微分不变量，创立张量分析的绝对微分学，提出缩约张量的概念。到 1900 年里奇和列维-齐维塔还合著出版了《绝对微分法及其应用》一书。他们给出的里奇张量系统分析及其应用的设想，深深地影响着从大学就自学的爱因斯坦。

格雷戈里奥•里奇，意大利数学家、理论物理学家，张量分析创始人之一。1853 年 1 月 12 日生于卢戈，1925 年 8 月 6 日卒于博洛尼亚。1869～1872 年学于罗马大学、博洛尼亚大学，后转至比萨高等师范学校，1875 年获博士学位。1877～1878 年在慕尼黑学术访问。1880 年以后一直在帕多瓦大学任数学物理教授。

1884～1894 年里奇通过研究（G.F.）B.黎曼、R.（O.S.）李普希茨以及 E.B.克里斯托费尔微分不变量的理论，萌发了绝对微分学（现称张量分析）的思想。1896 年发表了内蕴几何学的论文，使用了绝对微分学，进而提出缩约张量（里奇张量）的概念，以后成为理论物理的重要工具。1900～1911 年里奇和他的学生 T.列维--齐维塔进一步推动了这一学科的发展。因为张量与矢量相比，是直接进入了一种“关系域”，即张量比矢量更复杂一些，但同时里奇张量也比韦尔张量更复杂一些。因为按彭罗斯的说法，韦尔张量类似“一对一”，而里奇张量类似“一对多”。而里奇创立里奇张量，爱因斯坦应用里奇张量，只是类似才开了一个头。

因为如果说里奇张量是囊括当球面客体有绕着的物体圆周运动时，被绕着的物体的整体都有一个纯粹向内的加速，产生有类似向心力的扩张或收缩的缩约、缩并作用；那么为什么这个客体能绕着那个物体作圆周运动？客体绕着的那个物体是怎么形成的？都没有说。

其次，客体绕着的那个物体如果有自旋，里奇张量又是怎么样的形式？客体绕着的那个物体如果有破裂、变形、内外翻转，里奇张量又是怎么样的形式？里奇张量和韦尔张量都具有向心的引力作用，只是韦尔张量类似“一对一”，而里奇张量类似“一对多”，所以“韦尔张量使得物体被拉伸，或者扭曲----这个就是潮汐力”，并不等同于里奇张量在引力中，是全方位效果的使得朝向下落的那个引力源的物体的的缩约、缩并作用。

在西方，里奇张量起因于圆周运动的数学进化和物理射影，这是由意大利几何学家格里高里•里奇想到的。但直到爱因斯坦在广义相对论中使用了里奇理论之后，里奇思想才受到普遍的重视。再是到 20 世纪后期，杨振宁等人的规范场论的宣传和成功，韦尔张量才赛过里奇张量的知名度的----韦尔把规范变换局部化，发现电子存在必须要求光子存在。韦尔张量也相当于真空爱因斯坦方程里，出现的非线性引力子。引力子是自旋为 2 的粒子，如果按照彭罗斯的旋量写法，弯曲时空上的韦尔张量的旋量形式，满足自旋为 2 的运动方程，所以韦尔张量可以被认为是引力子。

这是非微扰的看法，因此在共形平坦的时空，比如闵氏时空和（反）德西特时空没有引力子，原因是因为共形平坦的时空上韦尔张量是退化的。在平坦时空上讨论的引力子，其实就是线性化的韦尔张量，这个张量与韦尔张量具有相同的对称性。因此说：“韦尔张量几乎是表示引力子的最好的张量”是对的。但在超弦理论里，需要额外维度的空间，威滕和斯特罗明格等人得到了这个空间，就是卡拉比-丘成桐空间。在这个空间之上，存在一个卡勒旋量，可以证明这是里奇平坦的。里奇平坦不是黎曼平坦，后者过分平坦，会有非常多的卡勒旋量。

根据黎曼张量的对称性，在 n 维流形上它有很多个独立的分量。如果这些分量全是零，那就是一个平坦流形，很多时候人们需要对曲率张量进行一些分类，对里奇张量的分类称为普列班斯基(Plebanski))分类,普列班斯基是波兰人。以 Plebanski 真空、Plebanski 动作形式的广义相对论的行动，也被写 Plebanski 行动。里奇张量奇妙的是，似乎已经包含了韦尔张量，即类似牛顿引力在地球的潮汐效应。能说明射影里奇张量整体效应的，是麦克斯韦的电磁场方程：变化的电场产生变化的磁场；变化的磁场产生变化的电场。

所以彭罗斯的解释是：“黎曼=韦尔+里奇”。韦尔张量，韦尔是测量类似自由下落的球面的潮汐畸变，即形状的初始变形，而非尺度的变化。里奇张量，里奇是测量类似球面的初始体积改变。这与牛顿引力理论要求下落球面所围绕的质量，和这初始体积的减少成正比相合。即物体的质量密度，或等效地能量密度（$E=mc^2$），应该和里奇张量相等。简单地说，黎曼曲率描述的是引力场，黎曼张量只是反映时空几何，描述引力场的是度规里奇张量，是黎曼张量的缩并、缩约。对这种“缩并力”，彭罗斯再解释说，爱因斯坦方程存在一个称作能量----动量的张量，它将有关的物质和电磁场的能量、压力和动量都组织在一起。他把这一张量叫做能量，爱因斯坦方程则粗略是：里奇=能量。正是在能量张量中“压力”的出现以及为使整个方程协调的条件要求，使得压力对体积缩小效应有所贡献。

那么不涉及韦尔张量吗？不是的。韦尔张量引起空虚的空间里感受到潮汐效应，爱因斯坦方程意味着存在将韦尔张量和能量相联系的微分方程的结合结构域。彭罗斯对这种韦尔张量重要性的推证，实际上是反过来又把部分里奇张量效应包含在韦尔张量中。但彭罗斯正如牛顿没有解决好韦尔张量超距的引力潮汐畸变一样，也没有解决好里奇张量的超距作用。因为物体在圆周运动的对称点，里奇张量也有类似对称超距的引力。这种作用传输是隐形的，可以是光速，也可以是超光速。彭罗斯继续阐述了里奇张量和韦尔张量这种结合结构域的产生原理，他说要理解该结合结构域，还可以射影麦克斯韦的电磁场方程电场 E 和磁场 B 的结合结构域。

因为韦尔张量韦尔实际是引力场的测定；韦尔的“源”是能量张量，这与麦克斯韦的电磁场的电场 E 和磁场 B 的源，是麦克斯韦电磁场理论的电荷和电流的结合结构域的情形相似。这种观点实际是将“麦学”引向“里奇张量”和“里奇流”统一的结合结构域；这里“电荷”对应里奇张量圆周运动的“源”效应，是类似彭罗斯的“扭量球”图像。“电流”类似“里奇流”，对应韦尔张量平移运动的“流”效应，可联系类似傅里叶级数、泰勒级数展开式变换的“孤子链”，以及隐形传输与宇宙弦。

电场 E 和磁场 B，以及电荷和电流这种结合结构域中的平行性、不可分割性，好理解，因为它们客观存在。但它们反过来也射影里奇张量和韦尔张量，以及里奇张量和里奇流这种结合结构域中的平行性、不可分割性。如果你理解其中缩并、缩约这种结合结构域的不可分割性有困难，不妨映射人生或电脑的投入做类比：人的生与死是一种结合结构域；在人出生到死亡这段时间圆周域里，正如一台电脑。电脑要使用，就要充电，这只类似上电网，对应韦尔张量，是直接的；也如人要吃饭是直接的。但电脑还可上互联网，使用的价值更大。

这对应里奇张量，是整体效应，其中的一切似乎都编上了密码，而且同样的东西可以是多种密码控制。例如电脑上的同样一个汉字的编码，还可以有大小、字体、颜色的编码。你只要随时在入网，在转帖、复制、打字的过程中，别人对某些字的大小、字体、颜色的编码也就容易混进你的电脑里，即使你的帖子字的大小、字体、颜色按你的想法在写字板上作过一般的处理，但如果你转贴到互联网别的论坛上，直接显示出来后，有时你会发现某些字的大小、字体或颜色变了，这就类似里奇张量的效应。

【10、结束语】

陈秀雄、王兵教授等证明的“哈密尔顿--田刚猜想”等数学难题，打开了和科学殿堂内外“柯召--赵华明--魏时珍猜想”的联系----《微分几何学杂志》是几何学领域的顶尖英文刊物，发表过如哈密尔顿关于里奇流的奠基性等多篇划时代的数学论文。

奇怪的是，陈秀雄、王兵教授等从开始写作到 2020 年正式发表，已用了 11 年；从投稿到 2020 年正式发表，耗时 6 年。为啥能在《中国科学技术大学学报（自）》发表，而不发表？2020 年论文的核心思想，是王兵和李皓昭推广到平均曲率流的研究，成功解决著名的延拓性猜想。中文创新的困境是：中国人要用英文和在英文期刊发表才能得到认可。例如，陈秀雄、王兵和孙崧给出丘成桐稳定性猜想基于里奇流的新证明，丘成桐稳定性猜想的第一个证明，由陈秀雄、唐纳森和孙崧给出，他们的英文和在英文期刊发表的证明，才得到学界的首肯，也因此赢得了维布伦几何奖。

中文科技论文不用英文和在英文杂志发表，何时才有法可治----有价值的国内的科技论文和书稿没有科学殿堂内外经费的，用英文能发表，能否照顾不付版费（或退回版费）；在我国官方主办的中文科技期刊发表也不算两投，才叫站起来强起来，爱国爱民才算接地气！

1963 年柯召院士、赵华明教授和魏时珍教授等“共一”作者，虽然按下“暂停键”，但 59 年间“柯猜弦论”的研究，并没有止步。例如，“柯召--赵华明--魏时珍猜想”的用意，就类似 59 年前就预见到如果全球有抗击新冠肺炎疫情的发生，中西医药结合救治的办法和隔离空间之间交流的办法----这像我国独家出版社出版的《中医药多体自然叩问》一书该书第 9 页上说的：“中国‘柯召--魏时珍--赵华明猜想’，是说证明‘空心圆球不撕破和不跳跃粘贴，能把内表面翻转成外表面’----以此类比中医药和西医药，传统的中医药类似空心圆球的外表面，而近代的西医药类似空心圆球的内表面。翁经科教授说：‘对于中国人来说，我们是吃着中药长大的，所以情感上很容易接受中医药这种疗法。但对于西方人来说，生病时突然要跟让喝完全没听说过的植物煮出来的苦汤，这很难接受’----这类似不相同、不相通的‘空心圆球不撕破的内外两个表面’”。

“柯猜弦论”的定义简明，接地气，也高深；高得像“青藏高原”上的“珠峰映射”，是 57 年间我国自主知识产权解答 1 维和 0 维结合的三旋宽窄数学，发现这跟弦论、圈论、旋子论、扭子论、时空非互易论、平行宇宙论、宇宙轮回论等联系的弦膜圈说一样，可解答时空连续与间断的统一----道理就像《羊过河》寓言中的独木桥的弦图，是拟设独木桥变形为“魔杖”的弦线，可类比萨斯坎德的《黑洞战争》一书中的“持球跑进”，和特霍夫特的全息信息守恒的疑难解答。即“魔杖”类似空心圆球内表面翻转成外表面连接的“弦线”桥，两只羊在桥中间碰头的“转点”，有类圈体宽窄三旋式的自旋能化解矛盾。

“柯猜弦论”之所以能精准一网打尽庞加莱猜想、

灵魂猜想、圆锥曲线、中国格物，直到今天的超弦理论、圈量子引力理论、多维时空、虫洞、黑洞、白洞、暗物质、暗能量、反物质、反宇宙、宇宙轮回，以及联系上“千僖难题”之四的黎曼假设，和美国克雷数学所2000年公布的其余千禧六难题的全解等模型空间，是“柯猜弦论”59 年间已形成了架设朗兰兹纲领桥梁的工具链。即柯猜弦论，是与以下成果相关的，它们是环量子三旋理论、点内空间、自然全息隐秩序、黎曼切口轨形拓扑、物质族质量谱计算公式、芝诺坐标、分形宇宙作图法、基因孤子演示链法、大脑密码学、系统拓扑论、真空辐射弦论，物质是避错码、暗物质是冗余码、量子色动化学、时间量子辐射原理等观点，以及能明快解释量子分隔、费米子和玻色子互相转化，明快解释全息信息守恒黑洞战争等疑难。

“科统”--“柯统”的重要和必要，例如，2020 年以来全球面对来势汹汹的突发新冠疫情，原先决定要召开的国际重要的领导人大会，他们的威信再大，保卫得再严密----类似“武统”和“文统”，但最好的办法还得召开“视频连线”会议----在隔离的两个或多个空间中，能互通信息----类似“空心圆球不撕破和跳跃粘贴，能把内表面翻转成外表面”----类似“科统”--“柯统”。

参考文献

[1]高唯，我国数学家成功证明微分几何学两大核心猜想，浙江日报，2020 年 11 月 9 日；

[2]王德奎，三旋理论初探，四川科学技术出版社，2002 年 5 月；

[3]孔少峰、王德奎，求衡论----庞加莱猜想应用，四川科学技术出版社，2007 年 9 月；

[4]王德奎，解读《时间简史》，天津古籍出版社，2003 年 9 月；

[5]陈超，量子引力研究简史，环球科学，2012 年第 7 期;

[6][英]罗杰•彭罗斯，皇帝新脑，湖南科技出版社，许明贤等译，1995 年 10 月；

[7]王德奎、林艺彬、孙双喜，中医药多体自然叩问，独家出版社，2020 年 1 月；

[8]刘月生、王德奎等，“信息范型与观控相对界”研究专集，河池学院学报 2008 年增刊第一期，2008 年 5 月；

[9]平角，量子计算机回采半导体环量子超弦----用“暗物质”造量子计算机初探，Academia Arena，May 25，2021；

[10]陈秀雄，记忆深处儿时梦，2021 年 11 月 3 日《人民日报》微博发布（浙江丽水市政府新闻办澎湃号）；

[12]B•格林，宇宙的琴弦，湖南科技出版社，李泳译，2002 年 1 月。

3/25/2024