Websites:
http://www.sciencepub.net/academia
http://www.sciencepub.net

Emails:
aarena@gmail.com
editor@sciencepub.net

Academia Arena

MARSLAND PRESS
Multidisciplinary Academic Journal Publisher

哥德巴赫猜想的函数法证明

朱献和

浙江省衢州市老科技工作者协会　324000　电子邮箱 qzxhp@qq.com

【摘要】本文通过对哥德巴赫猜想命题的深入审题解读，认为筛选法的证明不切合题意，由此提出函数法证明。函数法以合理设置动态对称坐标系为切入点，在变量区间［1,2ｍ］内构建出两个独立的二元一次素数函数 p_1和 p_2，进而逻辑推导出两个等价二元一次偶数函数 N 和２ｍ。对这两个等价偶数函数进行定性定量分析得出一致结论：在相同的定义域（大于 2）内，等式N＝２ｍ必然成立，由此推导出２ｍ＝p_1+p_2成立。
[朱献和. **哥德巴赫猜想的函数法证明.**. *Academ Arena* 2022;14(7):5-9]. ISSN 1553-992X (print); ISSN 2158-771X. (online)http://www.sciencepub.net/academia. 02. doi:10.7537/marsaaj140722.02.

【关键词】哥德巴赫猜想、函数法证明，动态对称坐标系，对称函数

一、引言

任何一个大于 2 的偶数都可以表示为两个素数之和。这就是世界著名的哥德巴赫猜想命题的文字表述。

一道数学题获得正确解题的前提是对求解命题在逻辑分析后有个切合题意的解读。下面是对哥德巴赫猜想命题涵义的逻辑分析：

a）该命题的数学语言表述是一个代数等式；

b）这个代数等式的左边就是“任何一个大于 2 的偶数”，其确切涵义是定义域为>2 的偶数变量，而不应是确定的偶数常量。这个偶数变量代表定义域内一切偶数，实际上就是所有偶合数；

c）代数等式右边“两个素数之和”，其确切涵义是两个素数变量相加，限定在素数无穷数列中取值，把奇合数排除在等式之外；

d）两个素数变量应该是两个值域不同的相互关联的独立素数函数式。这两个素数函数式可以代表整个素数无穷数列中一切素数；

e）切合命题题意的代数等式必然是一个函数式。

自从 1742 年哥德巴赫提出他的猜想命题后，引起了世界数学界的热切关注并为证明该命题成立作出了长期的努力探索。筛选法作为主流的证明方法持续了近百年的历史。在中国，著名的数学家王元、潘承洞和陈景润成为筛选法证明的领军人物享誉世界。其中陈景润证明的“1+2”被称为“筛法发展的顶峰”(1)。但这也是一条死胡同，现在全世界数学界公认，“1+2”的理论和方法不能为证明“1+1”提供任何指导和帮助，而是期待以新的数学思想研究“1+1”。(2)筛选法证明的无奈结局源自于该证明方法背离数学应有的严谨逻辑原则，在审题理解哥德巴赫猜想命题涵义时出现不应有的错误。

1)筛选法把代数等式左边“任何一个大于 2 的偶数”用一个确定常量值“大偶数”代替切合题意的偶数连续变量，把函数式曲解为解代数方程。不管在“大偶数”前加上什么“充分”、“足够”的定语，都是没有逻辑证明力的，充其量只是为推出哥德巴赫猜想命题多了“大偶数”的个例分析而已。

2)筛选法采取由代数等式右边的“两个合数之和”或“一个素数与一个合数之和”确定等式左边的“大偶数”，是一个不切合命题涵义的无奈倒向选择。因为筛选法不能用“两个素数之和”来确定“大偶数”，否则丧失了证明的意义。然而确定这样一个代数方程式作为证明的平台，彻底阻断了将代数方程式中的合数筛净，质变为等量的两个素数之和的一切可能。一个合数所包含的素数因子的多与少只是一种表象的量的差别，而不涉及合数的本质的改变。

依据上面的分析可作出否定筛选法证明的明确结论。本文由此提出函数法证明。

函数法对哥德巴赫猜想命题的数学语言表述是：如果用连续偶数自变量 2m（定义域>2）代表“任何一个大于 2 的偶数”，用互相独立的素数函数 p_1和 p_2分别代表两个素数，求证：$2m＝p_1＋p_2$成立。将 $2m＝p_1＋p_2$等价变换为$m-p_1＝p_2-m$。这就是函数法证明的切合题意的平台。逻辑分析上述等式，可以有下面几点认识：

a）$0<p_1\le m$，$m\le p_2<2m$，因此 p_1和 p_2就在变量区间［1,2m］内，函数法以此变量区间作为研究对象，随着 2m连续递增，这个区间代表整个偶数无穷数列；

b）如果$m-p_1＝p_2-m$成立，说明 p_1和 p_2以m点为中心存在对称关系，因此定性分析结论应该与对称函数相关联；

c）$p_1＋p_2$肯定是一个偶数，代数等式 $N＝p_1＋$

p_2就是个偶数函数，但 N 不一定具有与 2m相同的定义域以及必然的连续性。因此函数法证明的定性分析除确定 N 和 2m有相同的定义域 N＞2 外还要有对称性连续性的逻辑推论；

d）在［1,2m］区间内，存在以m为中心对称分布的奇数对数量是确定的：m/2（m为偶数）或（m+1）/2（m为奇数）。定量分析只要逻辑证明对称奇数组合中至少存在一对素数组合 p_1+p_2（数量用 d 表示），则定量分析结论应是 d≥1；

e）由于函数法研究对象是变量区间［1,2m］的偶数函数 $N=p_1+p_2$，定量分析就是对偶数函数 N 在值域内取不同的确定值得到的系列方程式求解，获得的相关数据如文中列出的 a、b、c、d，分别组成数列，只要根据这些数列的变化趋势是发散还是收敛，即可作出分析结论。

找到符合素数无穷数列客观存在本质规律的证明切入点，构建出合理的函数关系，是证明哥德巴赫猜想命题的关键所在。选择合适的动态对称坐标系则是抓住关键的前提和基础。

对函数法证明所选用的坐标系简要说明如下：

由于哥德巴赫猜想只涉及正整数范围的数，因此首选正整数自变量m（m≥0）数轴作为基础坐标系，把这条以 0 为坐标原点单向往右的射线确定为主坐标轴。属于主轴上不同类别的数轴如偶数、奇数、素数、合数等还包括偶数对称函数的对称轴 N＝2m，都隐含附着在主轴上，成多数轴合一的状态。

因为函数法证明涉及函数的对称性分析，所以必须在主轴上自主设置一个局部区间内的动态对称坐标系作为合理构建素数函数的基础。动态对称坐标系的要素包括：1）在主轴上所处的区间为［1,2m］；2）坐标原点 0 与主轴自变量m重合；3）辅助参数自变量 n_1 数轴方向向左，n_2 数轴方向相反向右，形成左右对称；4）n_1 和 n_2 数轴上标注的坐标值范围由 n_1、n_2 定义域确定。

当素数函数 p_1、p_2 进行代数和的运算后使上述动态对称坐标系发生自动的坐标系变换：1）在主轴上所处的区间变成（m、3m）；2）坐标原点从主轴上的m点变成 2m点；3）辅助参数自变量从独立的 n_1、n_2 变成组合自变量，其中（n_1-n_2）数轴方向向左，（n_2-n_1）数轴方向相反向右；4）（n_1-n_2）数轴和（n_2-n_1）数轴上标注的坐标值范围由定义域确定。

本文为给读者提供对上述坐标系直观感性的认知，特在证明部分附上四个坐标图。为显示隐含在主轴上的相关其它数轴，坐标图把主轴外需单独标示的数轴如附图 1 和附图 2 中的素数 p 轴，通过平行移离到主轴下方的方式标注出名称、方向及坐标值范围，而将动态对称坐标系平行移离到主轴所在区间上方的方式标注名称、方向及坐标值的范围。由于考虑到函数法涉及的素数函数 p_1、p_2 不包含偶数素数 2，为在 p 轴上表示出这个区别，所以素数 p 轴从原点 0 到 3 一小段用虚线画出。

以附图 1 为例，在素数 p 轴上的 $p_1=3$ 和 $p_2=11$ 这两个素数没有对称感，而在动态对称坐标系里，其对称性一看就明白：$n_1=n_2=2$，$p_1=7-4$，$p_2=7+4$，对动态坐标原点而言，左右对称相等。

自主设置动态对称坐标系成了函数法的逻辑证明关键环节。

函数法证明相关的数理依据：

引理 1：【素数无限定理】；

欧几里得证明得出结论：对于任何一个有限素数集，总存在一个素数不在其中，所以素数一定是无限的。

因为大于 0 的一切偶数除 2 是素数外，都是合数，所以素数无限定理的素数指的是奇素数。本文中涉及的素数（除特指偶素数 2 外）均指奇素数。现将素数数列表示如下：

3、5、7、11、13、17……p、p＋2 n ……（n 为正整数）

引理 2：【伯特兰-切比雪夫定理】；

伯特兰—切比雪夫定理 ：若整数 n＞ 3，则至少存在一个质数 p，符合 n＜ p ＜ 2n - 2。

根据定理可以推论：当m≥3 时，在［m,2m］变量区间内至少存在一个素数。

二、证明

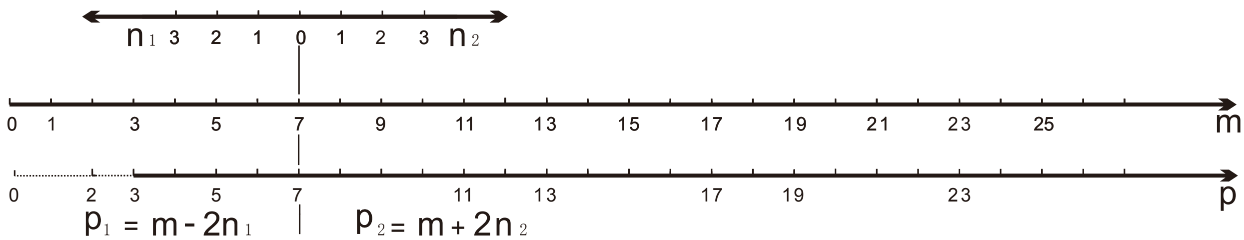
在正整数无穷数列中，任何一个＞2 的偶数自变量 2m都可以表示为两个相同或相邻的奇数之和。

当m是≥3 的奇数时，有等式：2m＝m＋m。

对于［1,2m］区间，以变量m为坐标原点，先在［1,m］区间内取与m相同（m是素数）或相邻（m不是素数）的素数 p_1，将它表示为自变量m的函数，有函数式 $p_1=m-2n_1$，式中 n_1 为辅助参数变量，其数轴方向向左，，定义域为 $0\le n_1<m/2$。

在［m,2m］区间内，根据引理 2，取m相同（m是素数）或相邻（m不是素数）的素数 p_2，同样可表示为自变量m的函数，有函数式 $p_2=m+2n_2$ 式中 n_2 为辅助参数变量，其数轴方向向右，定义域与 n_1 相同：$0\le n_2<m/2$。

在正整数数轴上，以m为动态坐标原点 0 及 n_1 和 n_2 两数轴方向左右相反构建出局部区间［1,2m］的动态对称坐标系。当m取值为 7 时素数函数 p_1、p_2 的坐标图像见附图 1。

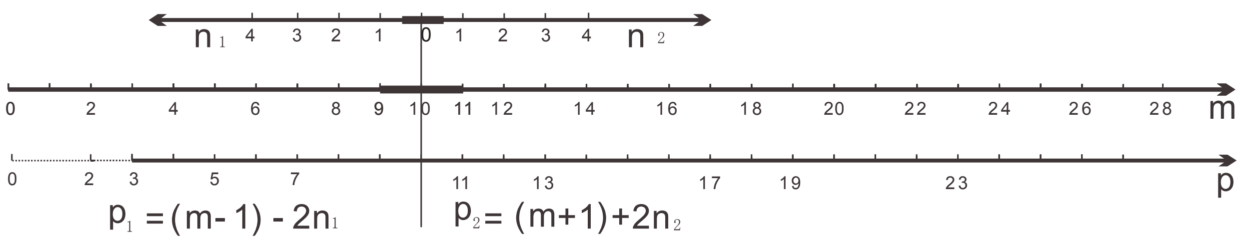


（附图 1）

上述两个素数函数关系式中，m是素数时，$n_1=n_2=0$，则 $p_1=p_2=m$。当n_1和n_2在定义域内取不同的整数值时，两函数式就代表了［1,2m］区间内的所有素数;在m连续递增时，两素数函数式就代表整个素数无穷数列。

将上述两素数函数式做代数和的运算,有等式 $p_1+p_2=m-2n_1+m+2n_2=2m-2(n_1-n_2)$。

当偶数自变量2m中的m为>3的偶数时，同样可以表示为两个相邻奇数之和。有等式：2m＝（m－1）+(m＋1）。同前理由，在［1,2m］区间内，必定至少存在一对素数 p_1和 p_2，分别与（m－1）和（m＋1）相同或相邻，有如下函数式：$p_1=(m-1)-2n_1$ 和 $p_2=(m+1)+2n_2$。式中辅助参数变量n_1和n_2的动态坐标原点就是数轴上的m点（$n_1=n_2=0$）。由于n_1和n_2只取整数值，因此（m－1）和（m＋1）的参数与m点相同均为$n_1=n_2=0$。n_1和n_2定义域相同：$0\le n_1<m/2$，和 $0\le n_2<m/2$。当m－1或m＋1是素数时$n_1=0$或$n_2=0$。当m取值为 10 时，素数函数 p_1、p_2的坐标图像见附图 2。



（附图 2）

同理将上述两素数函数式做代数和的运算，有等式 $p_1+p_2=(m-1)-2n_1+(m+1)+2n_2=2m-2(n_1-n_2)$。

以上等式说明两个素数函数式相加得到一个偶数函数。令 $N=2m-2(n_1-n_2)$，得到等式 $N=p_1+p_2$。

$N=2m-2(n_1-n_2)$ 这个偶数函数的感性图像意义是：式中的偶数函数 N 代表了［1,2m］区间内所有素数 p_1和 p_2组合（p_1+p_2）得到的数据群或数据链。如果用 a 表示 p_1的数量，用 b 表示 p_2的数量，则 N 的数据链总量为 ab。这个 ab 数据链对以 2m为中心存在于（m，3m）区间内的偶数进行沙堆式随动覆盖。当 N 数据链 ab 中至少一对满足 $n_1-n_2=0$ 时，等式 N=2m成立，表示该函数值 N 在正整数偶数轴上的对应点与自变量2m重合。

为了对 N 和 2m的相互关系给出严密的定性定量逻辑论证。首先要确定偶数函数 N 的值域与 2m 的定义域是否相同。

在 $N=2m-2(n_1-n_2)$ 这个函数式中，当m是奇数时，2m＞2，则m＞1，最小的奇数取值是m＝3，相应 2m＝6，在［1,6］区间内存在的所有素数是 $p_1=p_2=3$，相应参数变量 $n_1=n_2=0$，$p_2=5$，相应参数变量 $n_2=1$。所以 a=1、b=2，全部素数对组合有二种（1×2=2）：$N_1=3+3=6$、$N_2=3+5=8$。（3，9）区间偶数量为 3 个（4,6,8），N 数据链覆盖情况为 6（1 对）、8（1 对）。因此确定 N 的值域是 N≥6。

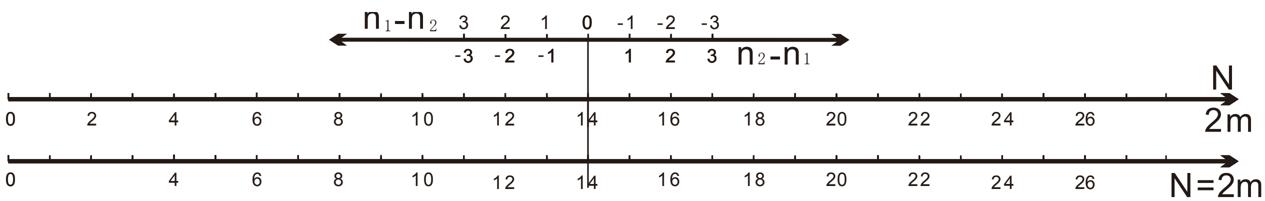
当m是偶数时，2m＞2 则m＞1，最小偶数取值是m＝2，相应 2m＝4，在［1,4］区间内存在的素数是 $p_2=3$，相应参数变量 $n_2=0$，所以 a=0、b=1，ab=0（即不存在奇素数对），因此这里用偶素数对表示 2+2=4，,有 N＞2。

以上对已知的偶数数列初始区间的分析得出结论：函数 N 的值域与自变量 2m的定义域相同：N＞2,2m＞2。

偶数函数式 $N=2m-2(n_1-n_2)$ 经过移项等价变换得到 $2m=N-2(n_2-n_1)$。这两个二元一次函数互换了自变量和函数，本质上同一代数等式以不同的函数式表现出来。前面讨论证明 N 和 2m定义域相同。由于参数变量n_1和n_2有相同的定义域：$0\le n_1<m/2$ 和 $0\le n_2<m/2$，因此参数变量（n_1-n_2）和（n_2-n_1）的定义域也相同：

$-m/2<(n_1-n_2)<m/2$、$-m/2<(n_2-n_1)<m/2$。

以上对两个二元一次函数相互关系所作的定性逻辑分析得出第一个结论是同一性，包括坐标系、函数关系式及自变量定义域三者同一。当 $2m=14$ 时，两个等价偶数函数坐标图像见附图 3。



（附图 3）

根据参数变量（n_1-n_2）和（n_2-n_1）定义域的同一性，当 $n_1-n_2=n_2-n_1$ 时，两个二元一次函数就变成了一元一次函数 $N=2m$。其感性图像意义是：$n_1-n_2=n_2-n_1$ 就是两个二元一次函数的动态坐标原点（$n_1-n_2=n_2-n_1=0$）的函数关系 $N=2m$，与对称轴 $N=2m$ 是同一图像，是三轴同一。因此上面的定性分析得出的第二个结论是对称性：在 $2m>2$ 的定义域内，N 和 2m 数轴上的点一一对应重合。

当 $n_1-n_2\neq n_2-n_1$ 时，存在 $|n_1-n_2|=|n_2-n_1|$，说明在以 $2m=N$ 为中心的（m，3m）区间内，$N=2m-2(n_1-n_2)$ 和 $2m=N-2(n_2-n_1)$ 两个二元一次函数互为反函数，因此两个二元一次函数成左右对称的函数。由于 2m 在 >2 的定义域内是连续的，所以 N 在定义域内也必然具有连续性，不可能有间断点存在。这就是定性逻辑分析的第三个结论。

上述定性分析得出的三个特性：同一性、对称性和连续性可表述为：在 $2m>2$ 的定义域内，等式 $N=2m$ 必定成立。

在构建偶数函数 $N=2m-2(n_1-n_2)$ 的基础上，再作定量逻辑推理分析：

一、在正整数数列中，将［1,2m］区间内的所有素数的总量用 k 来表示，将［1,m］和［m,2m］区间内的素数数量分别用 a 和 b 来表示，根据引理 1 可以得出如下推论：

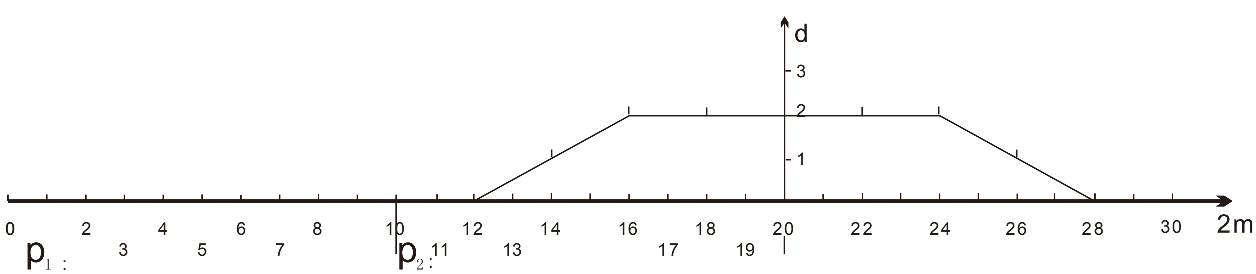
1、k 随着 2m 的连续递增，k 数列成单调增加的发散数列；

2、同理 a 和 b 数列也随 2m 的连续递增成单调增加的发散数列。

二、在［1,2m］区间内，所有素数对组合 p_1+p_2 得到的偶数函数 N 的数据链总量为 ab，这个数据链 ab 对（m,3m）区间内的偶数量（≤m）进行沙堆式随动覆盖。用 c 表示 ab 与（m,3m）区间内被 N 数据链 ab 覆盖的偶数量的比值时，当 $m\geq 9$ 时，$c\geq ab/m$ 成立。在 $m<9$ 时 $N=2m-2(n_1-n_2)$ 均有解（$d\geq 1$），而随 2m 连续递增得到的 c 数列成单调增加的发散数列。

三、c 值反映的是（m,3m）区间内的偶数被 N 数据链 ab 覆盖的重复次数平均值，沙堆式超量覆盖的波峰值只可能出现在 2m 这个中心近邻区域。如果用 d 表示当 $n_1-n_2=0$ 时符合 $N=2m$ 的素数对组合的数量，则 $d\geq c$ 成立。d 数列随 2m 的连续递增成波动增加的发散数列。因此结论是，$d\geq c\geq 1$ 必定成立。

附图 4 给出了当 $2m=20$ 时，偶数函数 N 的数据链（$ab=3\times 4$）对（10,30）区间内的偶数随动覆盖次数的感性图像。



（附图 4）

三、结论

综合以上对［1,2m］区间的定性定量全面逻辑研究分析，最后得到的总结论是：

在正整数无穷数列中，对于任何一个大于 2 的偶数 2m，在［1,2m］区间内必定至少存在一对素数 p_1 和 p_2，使等式 $2m=p_1+p_2$ 成立。

由于 $N=2m-2(n_1-n_2)$ 和 $2m=N-2(n_2-n_1)$ 形成对称函数关系，所以有 $n_1-n_2=n_2-n_1=0$，即 $n_1=n_2$。由此可知，偶数函数的对称关系的存在，从哲学上看完全根源于素数在正整数数轴上的分布的对称性的客观存在。如果本文哥德巴赫猜想证明被认可，则有如下推论：

在正整数数列中，对于任意一个≥2 的自变量 m，都有至少一对以m为中心对称存在的素数。

参考文献：

（1）王元《现有方法不能解决哥德巴赫猜想》，光明日报，1996 年 5 月 6 日
（2）《谈谈素数》，王元著，哈尔滨工业大学出版社，2011 年出版

6/22/2022