Academia Arena

Websites:
http://www.sciencepub.net/academia
http://www.sciencepub.net

Emails:
aarena@gmail.com
editor@sciencepub.net

MARSLAND PRESS
Multidisciplinary Academic Journal Publisher

# 4.力的保守性具有伽利略变换的不变性

李学生

山东大学物理学院　山东济南　250100

**摘要**：通过数学推导验证了保守力经过伽利略变换后仍然是保守力,加深了对"力是伽利略变换的不变量"的理解.

[李学生**. 4. 力的保守性具有伽利略变换的不变性.** *Academ Arena* 2021;13(6):67-69]. ISSN 1553-992X (print); ISSN 2158-771X (online). http://www.sciencepub.net/academia. 2. doi:10.7537/marsaaj130621.02.

**关键词**：保守力;显含时间的力场;相对性原理;伽利略变换不变性

**中图分类号**：O 313.1　　**文献标识码**：A

现在的力学教材都是利用环路积分为 0 定义保守力的,文献[1～8]指出如果力的保守性可随参照系而变,那么在不同的惯性系中做关于某力的保守性的物理实验,将可根据该力在一惯性系中做功是否与路径有关,从而判断该惯性系相对施加该力的作为另一惯性系的物体是否在运动——这是相对性原理不能允许的.力是伽利略变换的不变量就不成立了,经典力学理论本身就出现了矛盾.

显含时间力场的定义：对于多元函数 f=f（r,t）,如果 f 对 t 的偏导数恒等于零,则定义为"函数 f 不显含 t",否则称为"函数 f 显含 t".

**定理**：在两个相对匀速运动的惯性系 $o$,$O_1$ 中,如果 $o$ 系中**力 $\boldsymbol{f}$** 是**保守力**,那么在 $O_1$ 系中该力 $\boldsymbol{F}\quad\boldsymbol{f}$ 也是**保守力**.

**证明**：设 0 时刻惯性系 $o$,$O_1$ 完全重合,且 $O_1$ 系相对于 $o$ 系以正常数 $u$ 的匀速开始运动. 设 $t$ 时刻,质量为 $m$ 的质点在惯性系 $o$ 的位矢、速度、加速度、受的力、做的功中分别为：$\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{f},w$,在 $O_1$ 系中分别为：$\boldsymbol{R},\boldsymbol{V},\boldsymbol{A},\boldsymbol{F},W$,则据微分运算有

$$\boldsymbol{R}\quad\boldsymbol{r}\quad\boldsymbol{u}t,\boldsymbol{V}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{a},\boldsymbol{F}\quad m\boldsymbol{A}\quad m\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{f}; \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}\quad\boldsymbol{V}\mathrm{d}t\quad\boldsymbol{v}\mathrm{d}t\quad\boldsymbol{u}\mathrm{d}t\quad\mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad\boldsymbol{u}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

$$\mathrm{d}W\quad\boldsymbol{F}\quad\mathrm{d}\boldsymbol{R}\quad\boldsymbol{f}\quad(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad\boldsymbol{u}\mathrm{d}t)\quad\boldsymbol{f}\quad\mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad\boldsymbol{u}\quad m\boldsymbol{a}\mathrm{d}t\quad\mathrm{d}w\quad m\boldsymbol{u}\quad\mathrm{d}\boldsymbol{v}\quad\mathrm{d}w\quad m\mathrm{d}(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}), \tag{3}$$

$$\int_0^W \mathrm{d}W\quad\int_0^w \mathrm{d}w\quad\int_{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}} m\,\mathrm{d}(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}),W\quad w\quad m\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad m\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}_0. \tag{4}$$

由 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ 知,$W\quad w\quad m\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad m\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}_0\quad w_1(\boldsymbol{t})\quad m\boldsymbol{u}\quad q(\boldsymbol{t})\quad m\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}_0\quad j(\boldsymbol{t})$, (5)

由于 $\boldsymbol{R}\quad\boldsymbol{r}\quad\boldsymbol{u}t=\boldsymbol{r(t)}\qquad\boldsymbol{u}t=\boldsymbol{\varphi(t)}$ **(6)**

是关于时间 t 的连续函数,质点在任何时刻的速度都是唯一存在的,因此 $\boldsymbol{R}\quad\boldsymbol{\varphi(t)}$ 也是可导函数, 如果该函数出现常值函数区间，质点静止，受到的力是 0，不是显含时间的力，下面不研究这个区间，去掉该常值函数区间,该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间,设 D 是该函数的任意一个单调区间,根据反函数的定义在该区间上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(R)$,在区间 D 上 $W=j(t)=\boldsymbol{j_1(R)}$ 是位置的函数,对时间的偏导数等于 0,$\boldsymbol{F}$ 是保守力.由于在任意单调区间上成立,所以该结论在任何位置都成立,$\boldsymbol{F}\quad m\boldsymbol{A}\quad m\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{f}$ 是 $O_1$ 系中的**保守力**.

另证：$F(r)=F_1(R\text{-}ut)$,由于 $R=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}t=\boldsymbol{r(t)}+\boldsymbol{u}t=\boldsymbol{\varphi(t)}$ 是关于时间 t 的连续函数,质点在任何时刻的速度都是唯一存在的,因此 $R=\boldsymbol{\varphi(t)}$ 是可导函数, 如果该函数出现常值函数区间，质点做匀速直线运动，受到的力是恒力，不是显含时间的力，下面不研究这个区间，去掉该常值函数区间，该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间,设 D 是该函数的任意一个单调区间,根据反函数的定义在该区间上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(R)$,所以 $F(r)=F_1(R\text{-}ut)=F_1(R\text{-}u\varphi^{-1}(R))=F_2(R)$ (7)

仍然是位置的一元函数,对时间的偏导数等于 0,不是显含时间的力.有些文献[3]仅仅从 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}(r)=F_1(R\text{-}ut)$ 出发得出显含时间的力,其实经过数学变换可以消去时间 t,力经过伽利略变换后仍然可以表示为位置的函数,此时只能说是隐含时间的一元函数，文献[9]的观点是错误的.

不要认为在力的解析式中有时间变量就认为一定是显含时间的力场,必须分析一下能否消去变量 t,表示为位置的一元函数,例如当把弹簧振子固定在地面上时，在地面系观察弹力 $F=-kx=-\dfrac{1}{2}kx-\dfrac{1}{2}kA\sin(\omega t+\varphi)$ ,但不是显含时间的力场,否则地面系机械能也不守恒.只要力不是显含时间的力,场也不是显含时间的力场.

由于牛顿力学适用于绝对时空,因此场或者力的坐标必须是相对于力源静止坐标系里的坐标(因此力是伽利略变换的不变量包括力场的性质不变),

质点坐标是观察者坐标系里的坐标,这一点和相对论不同,在相对论中场的坐标和质点坐标都是观察者坐标系里的坐标,伽利略变换和洛伦兹变换在这一点上是有区别的,不能仅仅看做是洛伦兹变换的低速近似,伽利略变换只研究质点坐标,不研究场（或者力）的坐标.朗道的书《力学》中说,在惯性参考系中自由运动的质点,由于时间和空间的均匀性和各向同性,表征它所用的拉格朗日函数不显含时间和广义坐标和速度的方向.

保守力利用环路积分为 0 定义,注意这里的环路积分是对于同一个坐标系而言,而不是同一个参照系.参照系和坐标系有时是相同的，有时可以不同.例如在一个相对于地面匀速运动的传送带上放一块小木块，小木块在滑动摩擦力的作用下，从皮带的 A 点向后运动到 B 点，然后和皮带一起运动一段距离，在某一个时刻皮带突然停止，小木块由于惯性向前运动，在滑动摩擦力的作用下从 B 点运动到 A 点，如果以皮带为参照系，小木块受到摩擦力的环路积分为 0,滑动摩擦力成为了保守力.可是小木块的动能不变，内能增加，能量守恒定律不成立.在这里问题的症结在于皮带这个参照系其实代表两个惯性系，开始时相对于地面匀速运动，后来相对于地面静止,其实对于其中任何一个惯性系小木块都没有形成环路.在这里参照系和惯性系不是一回事，这个问题搞不明白，容易出错，把耗散力变成保守力，也可以把保守力变成非保守力.下面以简谐振动为例说明一下这个情况——假设弹簧振子固定在地面上,小车相对于地面的速度为**u**,取简化假设 k=1,**u**=1,m=1, A=$\pi/2$，$\omega=1$,在地面上看小球的坐标随时间变化是

$$x(t)=\frac{\pi}{2}\sin t \qquad (8)$$

小车上看小球的坐标的变化是

$$x'(t)=\frac{\pi}{2}\sin t-t \qquad (9)$$

小球往程出发时（t=0）的坐标是 x（0）= x'（0）=0,那么

在地面上看,从（8）式显然可见,在时间 0<t<π/2 中,小球的坐标 x 随着时间 t 增加,直至 t=π/2,x（t）达到最大值 π/2.

在小车上看,从（9）式容易证明,在时间 0<t<arccos(2/π)内 x'随着时间 t 增加,直至 t= arccos(2/π),此时 x'（t）达到最大值

$$x'_{\max}=\frac{\pi}{2}\sin(\arccos(2/\pi)-\arccos(2/\pi) \qquad (10)$$

然后 x'(t)随着时间减小,至时间 t=π/2, 达到 x'=0,即回到出发点.

两者比较,由于 arccos(2/π)<π/2, 所以在小车上看小球达到（4)式所表示的最大坐标 $x_{\max}$'时,地面上看小球还未达到它的振幅呢！而当在小车上看,小球已经从最大坐标值回到出发点 x'=0 时(t=π/2),地面上的观察者看到小球正好第一次达到它的振幅.

所以,在小车上看,小球在时间 0 到π/2 内完成了一个往返.力的往返路径积分是

$$Q_1=\int_0^{x'_{\max}}-f_{往程}\cdot dx'+\int_{x'_{\max}}^{0}-f_{返程}\cdot dx' \qquad (11)$$

这等式的等号右边两个积分的被积力函数 $f_{往程}(x')$ 和 $f_{返程}(x')$ 有不同的函数形式.因为 $f=-kx=-k(x'+ut)=-(x'+t)$,将此式代入式(11)得

$$Q_2=\int_0^{x'_{\max}}(x'+t)dx'+\int_{x'_{\max}}^{0}(x'+t)\cdot dx' \qquad (12)$$

两个积分的被积函数中的 $x'$项可以互相抵消,但是 $t$ 作为 $x'$ 的函数 $t(x')$ 是函数 $x'$(t)的反函数,在 $x'$ 的区间 $(0,x'_{\max})$ 和 $(x'_{\max},0)$ 中的表示式是不同的,分别记为 $t_{往}(x')$ 和 $t_{返}(x')$,它们不能相互抵消,所以 $Q_2$ 不是零.具体计算就是:

从(11)出发.注意到在（11）中,积分的自变量是 x',其往程和返程的转折点在 $x_{\max}$',由（10）式表示.现在做变量代换 $x'=x-ut$ ,往程和返程的转折点就要用 $x_{\max}$'所对应的 $x$ 和 $t$ 来表示了.上面式(9)和式（10）之间的文字已经说明,往程和返程的时间转折点是 arcos(2/π),而根据（8）得此时 x 达到 $x(t)=\frac{\pi}{2}\sin t=\frac{\pi}{2}\sin(\arccos(2/\pi))$,此即转折点所对应的 x 值.所以（11）式化为

$$Q_2=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}\sin\arccos(2/\pi)}-f\cdot dx+\int_0^{\arccos(2/\pi)}uf\cdot dt\right)+\left(\int_{\frac{\pi}{2}\sin\arccos(2/\pi)}^{\pi/2}-f\cdot dx+\int_{\arccos(2/\pi)}^{\pi/2}uf\cdot dt\right)=\int_0^{\pi/2}-f\cdot dx+\int_0^{\pi/2}uf\cdot dt \qquad (13)$$

因为 $f=-kx=-x,\ u=1$, 所以上式化为

$$Q_1=\int_0^{\pi/2}xdx-\int_0^{\pi/2}xdt=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\sin tdt=\frac{\pi^2}{8}+\left.\frac{\pi}{2}\cos t\right|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}\neq 0\,!!$$

上面计算过程错误的根源在于理解为质点在相对空间里运动,时间却是绝对时间,既不是伽利略变换也不是洛伦兹变换,在经典力学中研究问题必须在同一个时空里讨论.文献[10]就是出现类似错误.

文献[11]认为势函数不仅仅与位置有关,还和速

度有关,其实经过数学变换可以消去速度,表示为位置的函数.只要力不是显含时间的力,场也不是显含时间的力场.力是伽利略变换的不变量是指各个惯性系里的观察者在同一个力场中研究质点的运动规律.

海森伯认为：自然科学不是自然界本身，而是人和自然界之间关系的一部分，因而就依赖于人，有人的烙印.在量子力学中，可以有幺正变换，幺正变换可以是任意的,可以把一个不含时的哈密顿量变换为一个含时的哈密顿量，也可以反过来，把含时的哈密顿量变为不含时的.哈密顿量，这里相当于是能量.幺正变换其地位就是类同于时空变换，只不过后者是时空（外部空间自由度）变换，而幺正变换（以及规范变换），是内部空间自由度的变换.虽然具体含义不同，物理地位意义其实相当.在这里一定要注意幺正变换不是伽利略变换.在时空变换中，洛伦兹变换中力是协变量，伽利略变换中力是不变量.日本的粒子物理学家汤川秀树（Hicliki Yukawa，1907~1981）评价爱因斯坦时说："爱因斯坦拥有一份只有少数物理学家才拥有的美感."爱因斯坦也曾经说："我坦白地承认我被自然界向我们显示的数学体系的简洁性和优美性强烈的吸引住了……照亮我的道路,并不断给我新的勇气去愉快地正视生活的理想，是善、是美和真."

**参考文献：**


1 李卫平,罗洁.注意力的保守性和参照系的关系.中学物理,2013 年 3 月第 5 期：42～43.

2 刘瑞金.机械能相关问题的讨论.淄博学院学报（自然科学与工程版）,2001（12）：47～50.

3 谢永珠,凌寅生.物理定律在惯性坐标系间的形式不变性.物理教师,1999（7-8）：68～69.

4 赵治华,史祥蓉.什么是保守力.工科物理,1997（1）：2～4.

5 朱如曾.力场与时间有关系统的功能定理及其应用.大学物理,2016（10）：11～16.

6 俞仲林.机械能守恒与参照系的选取有关.柳州师专学报,1994 年 6 月第 2 期：11～13.

7 郑金.对一道物理竞赛题的两种互异解答的探讨.物理通报,2015（7）：109～112.

8 舒幼生.力学，北京大学出版社，2005 年 9 月第一版：85.

9 白静江.机械能守恒定律的一个推广.黄淮学刊,1995（3）：68～73,56.

10 赵国新.保守力与系统势能的研究.安徽工学院学报，第 12 卷第 3 期，1993（9）: 90～96.

11 赵凯华.时空对称性与守恒律(上篇)——牛顿力学.大学物理,2016（1）：1～3.


## The conservatism of the force has the invariance of the galilean transformation


Li Xuesheng

School of Physics, Shandong University, Jinan, Shandong 250100



**Abstract**：Verified by mathematical deduction conservative force after Galileo transformation is still a conservative force, deepened to "force is the galilean transformation invariant" understanding.



[Li Xuesheng**. 4. he conservatism of the force has the invariance of the galilean transformation.** *Academ Arena* 2021;13(6):67-69]. ISSN 1553-992X (print); ISSN 2158-771X (online). http://www.sciencepub.net/academia. 2. doi:10.7537/marsaaj130621.02.

**Key words**：conservative force; implict time force field; principle of relativity; Galileo transformation invariance.

6/2/2021