Academia Arena

Websites:
http://www.sciencepub.net/academia
http://www.sciencepub.net

Emails:
aarena@gmail.com
editor@sciencepub.net

MARSLAND PRESS
Multidisciplinary Academic Journal Publisher

对一道困扰力学界 50 多年习题的思考

李学生

（山东大学物理学院 山东济南 250100）

摘 要：首先证明了力的保守性具有伽利略变换的不变性，保守力不可能变换成显含时间的力；然后证明了圆周运动的向心力是保守力，推出了在地面系和小车系自然摆动的单摆在摆动过程中机械能都守恒的结论，验证了机械能守恒定律满足力学相对性原理，解决了力学界 50 多年的困惑，并对当前力学教材提出了几条修改建议。

[李学生. **对一道困扰力学界 50 多年习题的思考.** *Academ Arena* 2020;12(9):48-54]. ISSN 1553-992X (print); ISSN 2158-771X (online). http://www.sciencepub.net/academia. 4. doi:10.7537/marsaaj120920.04.

关键词：单摆；动能；势能；保守力；机械能守恒
中图分类号：O 313。1 文献标识码：A 文章编号：

Reflections on the Exercise of Over 50 Years Troubling the Mechanics Circle

Li Xuesheng

(School of Physics, Shandong University,Jinan, Shandong 250100)

Abstract: It is firstly proved that the conservativeness of force has the invariance of Galilean transformation. The conservative force can not be transformed into the force containing time; and then proved that the centripetal force of the circular motion is a conservative force. It is derived, in the ground and the car systems, the single pendulum of the natural swing in the swing process, its mechanical energy are conserved conclusions. It is proved that the law of conservation of mechanical energy satisfies the principle of relativity of mechanics, and solves the confusion of more than 50 years in the mechanics circle, and proposed a few changes to the current mechanics teaching materials.

Key words: the single pendulum；kinetic energy；potential energy；conservative force;conservation of mechanical energy

引理 1：力的旋度等于 0，环路积分为 0 和作用力 F 是某位势 Φ 的梯度三者是等价的。

设定 F 为在空间任意位置定义（或空间内单连通的区域）的矢量场，假若它满足以下三个等价的条件中任意一个条件，则可称此矢量场为保守矢量场：

①F 的旋度是零：$F\times\nabla=0$；

②假设粒子从某闭合路径 C 的某一位置，经过这闭合路径 C，又回到原先位置，则力矢量 F 所做的机械功 W 等于零：$W=\int_C F\bullet dr=0$；

③作用力 F 是某位势 Φ 的梯度：$F=-\nabla\Phi$。

①⇒②：设定 C 为任意简单闭合路径，即初始位置与终结位置相同、不自交的路径。思考边界为 C 的任意曲面 S。斯托克斯定理表明 $\int_S(\nabla\times F)\bullet da=\int_C F\bullet dr$。假设 F 的旋度等于零，方程左边为零，则机械功 W 是零，第二个条件是正确的。

②⇒③：假设对于任意简单闭合路径 C，F 所做的随体功 W 是零，则保守力所做于粒子的随体功，独立于路径的选择。设定函数 $\Phi(x)=-\int_o^x F\bullet dr$，其中 x 和 o 分别是特定的初始位置和空间内任意位置。根据微积分基本定理，$F(X)=-\nabla\Phi(x)$。所以第三个条件是正确的。

③⇒①：假设第三个条件是正确的。思考下述方程：

$$\nabla \times F = -\nabla \times \nabla \Phi = -(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y})\hat{x} - (\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z})\hat{y} - (\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x})\hat{z} = 0$$

所以第一个条件是正确的。因此这三个条件彼此等价。由于符合第二个条件就等于通过保守力的闭合路径要求，所以只要满足上述三个条件的任何一条件，施加于粒子的作用力就是保守力。如果作用在物体的力所做之功仅与力作用点的起始位置和终了位置有关，而与其作用点经过的路径无关，即不仅力有势，且在相应的势能表达式中不显含时间，该力则为保守力。势能定理为 $\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$ =-*f*· *dr*，势能是位置的函数，环路积分必等于 0。由于旋度具有伽利略变换的不变性，因此力的保守性也具有伽利略变换的不变性。

引理 2：力的保守性具有伽利略变换的不变性。

在两个相对匀速运动的惯性系 *o*，O_1 中，如果 *o* 系中**力 *f* 是保守力**，那么在 O_1 系中该力 ***F*** ***f*** 也是**保守力**。

证明：设 0 时刻惯性系 *o*，O_1 完全重合，且 O_1 系相对于 *o* 系以正常数 *u* 的匀速开始运动。设 *t* 时刻，质量为 *m* 的质点在惯性系 *o* 的位矢、速度、加速度、受的力、做的功中分别为：***r***,***v***,***a***,***f***,*w*，在 O_1 系中分别为：***R***,***V***,***A***,***F***,*W*，则据微分运算有

$\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{u}t$ ， $\boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u}$ ， $\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{F}\quad m\boldsymbol{A}\quad m\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{f}$;

$\mathrm{d}\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{V}\mathrm{d}t\quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}t\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t\quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t.$

$\mathrm{d}W\quad \boldsymbol{F}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{f}\quad (\mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t)\quad \boldsymbol{f}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{u}\quad m\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}w\quad m\boldsymbol{u}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{v}\quad \mathrm{d}w\quad m\mathrm{d}\,(\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v})$, （1）

$\int_0^W \mathrm{d}W\qquad \int_0^w \mathrm{d}w\qquad \int_{\boldsymbol{u}\cdot v_0}^{\boldsymbol{u}\cdot v} m\quad \mathrm{d}\quad (\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v})$ ，

$W\quad w\quad m\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad m\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}_0.$ （2）

由 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{a}\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ 知，$W\quad w\quad m\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad m\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}_0\quad w_1(\boldsymbol{t})\quad m\boldsymbol{u}\quad q\ (\boldsymbol{t})\quad m\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}_0\quad j\,(\boldsymbol{t})$，

由于 ***R*** ***r*** ***ut***=***r*** ***(t)*** ***ut***=ϕ**(t)**是关于时间 t 的连续函数，质点在任何时刻的速度都是唯一存在的，因此 ***R*** ϕ**(t)**也是可导函数，如果该函数出现常值函数区间，质点静止，受到的力是 0，不是显含时间的力，下面不研究这个区间，去掉该常值函数区间，该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间，设 D 是该函数的任意一个单调区间，根据反函数的定义在该区间上存在反函数 t=ϕ^{-1}(R)，在区间 D 上 *W*=*j* (*t*)=$\boldsymbol{j_1}$(***R***)是位置的函数，**对时间的偏导数等于 0**，***F*** 是保守力。由于在任意单调区间上成立，所以该结论在任何位置都成立，***F*** *m**A*** *m**a*** ***f*** 是 O_1 系中的**保守力**。

力的保守性具有伽利略变换的不变性，有时表达式中含有时间 t，但是通过伽利略变换可以消去，对时间的偏导数等于 0，此时不是显含时间的力，是隐含时间的一元函数，纠正某些文献和力学教材中错误的表述。

力是伽利略变换的不变量，不但包括力的大小和方向，而且包括力的保守性也具有伽利略变换的不变性。

引理 3：圆周运动的向心力是一个保守力。

证明：如图 1，质量为 *m* 的钢球（视为质点），在长为 *R* 的轻绳的牵制下，在光滑水平地面上绕地面上的 *o* 点做圆周运动，有一小车相对于地面以匀速 *u* 沿光滑水平地面运动，忽略摩擦和空气等各种阻力。

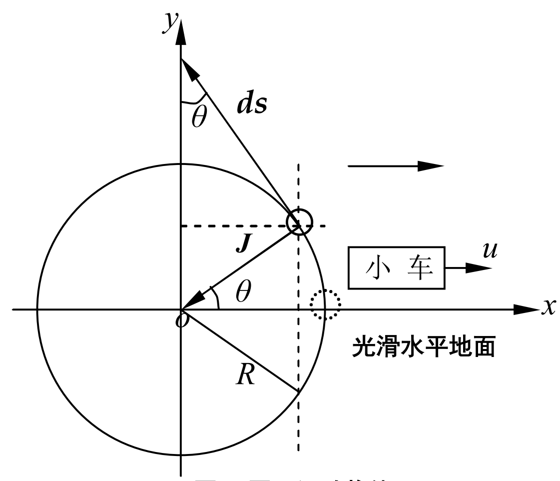

图 1 圆周运动物体

在地面系，建立平面直角坐标系如图 1 所示。由于向心力和位移始终垂直，有：

$$\int_0^s \boldsymbol{J}\quad \mathbf{ds}\qquad \int_0^s J\quad \cos\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}s\qquad \int_0^s 0\quad \mathrm{d}s\quad 0.$$

无论运动多少周，当钢球回到出发点时，向心力的功始终等于 0，根据保守力的定义可知圆周运动物体受到的向心力是保守力。根据引理 2，在小车系向心力也是一个保守力。因此**对于任何惯性系，圆周运动的物体受到的向心力都是一个保守力。同理可以证明斜面的支持力等各种光滑约束中的约束力在所有惯性系也是保守力。**

将摆锤质量为 *m*，轻质摆线（摆线质量视为 0）长度为 *L* 的单摆挂在与地面相固连的摆架上，将摆锤从单摆静止时的竖直下垂位置拉至摆角为 θ_0（$\theta_0 \in [0^0, 90^0]$时自然放手，在忽略各种阻尼时，单摆就

做自然摆动，θ_0 为最大摆角。有一小车在地面（地球质量视为充分大，稳定地保持为惯性系）上以正常数 u 向右运动。

求证：在地面系和小车系上观察，单摆的机械能都守恒。

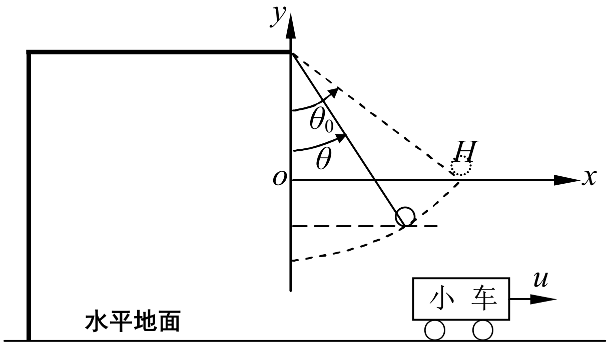

图 2 自然摆动单摆机械能问题

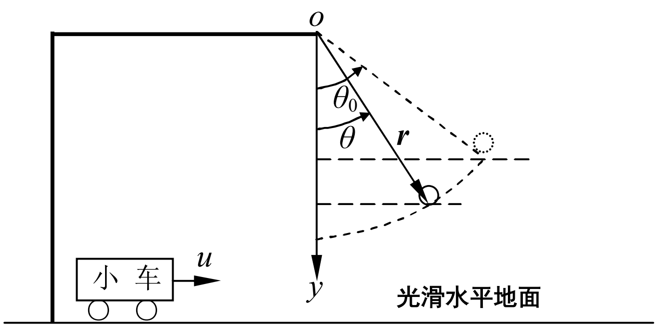

图 3 自然摆动单摆机械能守恒问题新解

解：由于假定地球质量充分大，忽略其能量的变化，只能按照外场计算，此时一个保守力的功等**于质点势能的减少。根据引理 1—3，无论是地面系，还是小车系摆线的拉力都是一个保守力。**

在地面系，建立平面直角坐标系如图 2 所示。由于在摆动过程中摆线的拉力和重力在该直线上的分力与位移垂直不做功，因此只需考虑重力在切线方向的分力。单摆在 t=0 时刻从最大摆角 θ_0 开始摆动（规定初始时刻的势能为 0），在 t 时刻的摆角、速度大小、切向加速度大小、动能、势能、机械能分别为：$\theta, v, a, E_k(t), E_p(t), E(t)$；在小车系,单摆 t 时刻的速度大小、切向加速度大小、动能、势能、机械能分别为：$v_1, a_1, E_{1k}(t), E_{1p}(t), E_1(t)$。则在**地面系**：在地面上观察时，以单摆的悬挂点 o 为极点，单摆静止时与摆线重合的射线 oy 为极轴，从 o 到摆锤的矢量 $\boldsymbol{r}$ 为极径，极轴和极径的夹角 θ 为极角建立平面极坐标系如图 3 所示。

设在地面上观察时，单摆在 t=0 时刻从最大摆角 θ_0（$\theta_0 \in (0^0, 90^0]$）开始摆动(规定初始时刻的势能为 0)，t 时刻的摆角、速度大小、切向加速度大小、动能、势能、机械能分别为：$\theta, v, a, E_k(t), E_p(t), E(t)$；在小车上观察时,单摆在 t 时刻的摆角、速度大小、动能、势能、机械能分别为：$\theta_1, v_1, E_{1k}(t), E_{1p}(t), E_1(t)$；在地面上和小车上观察时,都设摆锤的最高点为零势点。则有：

$$v \quad \frac{ds}{dt} \quad \frac{d[L(\theta_0-\theta)]}{dt} \quad \frac{-Ld\theta}{dt}.$$

$$dt \quad \frac{-Ld\theta}{v} \quad (0\leqslant\theta\leqslant\theta_0).$$

$$mg\sin\theta \quad ma, g\sin\theta \quad a \quad \frac{dv}{dt} \quad \frac{dv}{-Ld\theta} \quad \frac{-Ld\theta}{dt} \quad \frac{dv}{-Ld\theta} \quad v, vdv \quad gL\sin\theta d\theta,$$

$$\int_0^v v \, dv \quad gL\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta d\theta, \ \frac{1}{2}v^2 \quad gL(\cos\theta \quad \cos\theta_0).v \quad \sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}.$$

$$\frac{d\theta}{dt} \quad \frac{v}{-L} \quad \frac{1}{L}\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}$$

$$\sqrt{2\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\theta_0)} \quad \sqrt{2\frac{g}{L}\cos\theta-2\frac{g}{L}\cos\theta_0} <$$

所以对于一个确定的单摆而言,只要初始状态确定，单摆的摆角是时间 t 的单值函数，因此我们只需证明任意摆角的机械能相等即可，在本题中是减函数。

$$E_k(t) \quad E_k'(\theta)=\frac{1}{2}mv^2 \quad mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0);$$

$E_P(t) \quad E_p'(\theta)= mgy \quad mg\,(L\cos\theta_0 \quad L\cos\theta) \quad 0 \quad mgL\,(\cos\theta \quad \cos\theta_0)$.

$E(t) \quad E_k(t) \quad E_P(t) \quad E_k'(\theta) \quad E_P'(\theta) \quad mgL\,(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad mgL\,(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad 0$.

所以**在地面系**单摆的机械能守恒，守恒值为 0。

在小车系：

直觉判断：

因为摆锤在最高点以匀速度 u 相对于小车沿 x 轴负向运动，我们规定此时势能为 0，所以**在小车上观察**时，摆锤的机械能比在**在地面上观察**时增加 $\frac{1}{2}m(\quad u)^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$，所以**在小车上观察**时，摆锤的机械能为：

$E_1(\theta) \quad E(\theta) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad 0 \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$（常数）。

所以**在小车上观察**时，单摆的机械能守恒，守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$。

数学推导：在地面系——设初相为 0，v=ωR，

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y= R\sin\omega t \end{cases}$$

将运动方程作伽利略变换，写出小车系运动方程：

$$\begin{cases} x_1=x-ut=R\cos\omega t-ut \\ y_1= y=R\sin\omega t \end{cases}$$

$v_{1x} \quad v_x \quad u \quad v\cos\theta \quad u,\ v_{1x}^2 \quad (v_x \quad u)^2 \quad v_x^2 \quad u^2 \quad 2u\,v_x;\ v_{1y} \quad v_y,\ v_{1y}^2 \quad v_y^2$.

$v_1^2 \quad v_{1x}^2 \quad v_{1y}^2 \quad v_x^2 \quad u^2 \quad 2u\,v_x \quad v_y^2 \quad v^2 \quad u^2 \quad 2u \quad v\cos\theta$

$gL\,(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad u^2 \quad 2u \quad \sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\,\cos\theta$。

$E_{1k}(t) \quad E_{1k}'(\theta)= \frac{1}{2}m\,v_1^2 \quad mgL\,(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu \quad \sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\,\cos\theta$.

$a_{1x} \quad \frac{\mathrm{d}v_{1x}}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \quad 0 \quad a_x;\ a_{1y} \quad \frac{\mathrm{d}v_{1y}}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \quad a_y;\ a_1 \quad a \quad g\sin\theta$.

$m\,a_{1x} \quad m\,a_x;\ m\,a_{1y} \quad m\,a_y;\ ma_1 \quad ma \quad mg\sin\theta$.

$$E_{1p}(t) \quad E_{1p}'(\theta)= \int_{\theta_0}^{\theta} ma_1 \quad \mathrm{d}s \quad \int_0^t \left(-ma_1\cos\theta - m\frac{v^2}{L}\sin\theta\right) \quad (\quad u)\mathrm{d}t$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} mg\sin\theta \quad (\quad L\mathrm{d}\theta) \quad mu \quad \int_{\theta_0}^{\theta}\left(g\sin\theta\cos\theta+\frac{v^2}{L}\sin\theta\right)\frac{-L\mathrm{d}\theta}{v}$$

$$mgL \int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta \quad \mathrm{d}\theta \quad muL \int_{\theta_0}^{\theta}\left(g\cos\theta+\frac{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}{L}\right)\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{v}$$

$$mgL\cos\left.\theta\right|_{\theta_0}^{\theta} \quad mugL \int_{\theta_0}^{\theta}(\cos\theta+2\cos\theta-2\cos\theta_0)\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}}$$

$$mgL\,(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad \frac{3mugL}{\sqrt{2gL}} \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos\theta-\cos\theta_0+\cos\theta_0-\frac{2}{3}\cos\theta_0}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \quad \mathrm{d}\,(\cos\theta \quad \cos\theta_0)$$

$$mgL\,(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad \frac{3mugL}{\sqrt{2gL}} \quad \frac{2}{3}(\cos\theta \quad \cos\theta_0)^{\frac{3}{2}} \quad \frac{mugL}{\sqrt{2gL}} \quad (\cos\theta \quad \cos\theta_0)^{\frac{1}{2}}\cos\theta_0$$

$$mgL\,(\cos\theta\quad \cos\theta_0)\quad mu\quad \sqrt{2gL}\,(\cos\theta\quad \cos\theta_0)^{\frac{3}{2}}\quad mu\quad \sqrt{2gL}\,(\cos\theta\quad \cos\theta_0)^{\frac{1}{2}}\cos\theta_0$$

$$mgL\,(\cos\theta\quad \cos\theta_0)\quad mu\quad \sqrt{2gL}\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}\,(\cos\theta\quad \cos\theta_0\quad \cos\theta_0)$$

$$mgL\,(\cos\theta\quad \cos\theta_0)\quad mu\quad \sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\,\cos\theta。$$

$$E_{1p}(t)\quad E_{1p}'(\theta)= \quad mgL\,(\cos\theta\quad \cos\theta_0)\quad mu\quad \sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\,\cos\theta.$$

$$E_1(t)\quad E_{1k}(t)\quad E_{1p}(t)\quad E_{1k}'(\theta)\quad E_{1p}'(\theta)=$$

$$mgL\,(\cos\theta\quad \cos\theta_0)\quad \frac{1}{2}mu^2\quad mu\quad \sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\,\cos\theta$$

$$mgL\,(\cos\theta\quad \cos\theta_0)\quad mu\quad \sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\,\cos\theta\quad \frac{1}{2}mu^2\quad 常数。$$

所以在小车系单摆的机械能也守恒,守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$。当 **u**=0 时两个坐标系重合，守恒值相等，符合对应原理的要求。若 **u≠0** 时，由于在单摆问题摆角比较小，cos $\theta\neq0$，因此当且仅当 $cos\theta=cos\theta_0$ 时势能相等。

另证：由于本题假定地球质量充分大，忽略地球能量的变化，只能按照外场计算，此时**一个保守力的功等于质点势能的减少。**

设与单摆还未摆动而自然下垂位置重合的竖直直线与水平地面的交点 O 为地面系的原点，点 o 为小车系的原点。设 0 时刻 o 与 O 完全重合，单摆从摆角 θ_0 开始摆动。设在 t 时刻，摆锤与小车 o 的位置如图 1 所示；摆锤在小车系的位矢、速度、加速度、受的力、动能、势能、机械能分别为：

$\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{f},e_k,e_p,e$;

在地面系的位矢、速度、加速度、受的力、动能、势能、机械能分别为：$\boldsymbol{R},\boldsymbol{V},\boldsymbol{A},\boldsymbol{F},E_k,E_p,E$。则在地面系观察时，在地面单摆体系中，因为摆锤仅受到重力和拉力的作用，拉力与位移始终垂直不做功，摆锤的机械能 E 守恒，即 $E\quad D$ 常数，亦即 $\mathrm{d}E\quad \mathrm{d}D\quad 0$。

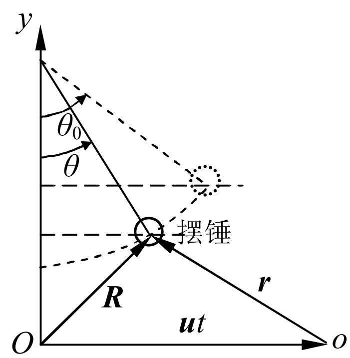

图 4 自由摆动单摆机械能在各惯性系都成立

据伽利略变换或图 4 知：

$$\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{u}t,\ \boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{F}\quad m\boldsymbol{A}\quad m\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{f}.$$

$$V^2\quad \boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{V}\quad (\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u})\quad (\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u})\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\quad 2\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\quad v^2\quad 2\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad u^2,$$

$$\frac{1}{2}mV^2\quad \frac{1}{2}mv^2\quad m\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad \frac{1}{2}mu^2, E_k\quad e_k\quad m\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad C,$$

$$\mathrm{d}E_k\quad \mathrm{d}e_k\quad m\boldsymbol{u}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{v}\quad \mathrm{d}C\quad \mathrm{d}e_k\quad \boldsymbol{u}\quad m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\quad 0\quad \mathrm{d}e_k\quad \boldsymbol{f}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t。$$

$$\mathrm{d}E_p\quad \boldsymbol{F}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{f}\quad \mathrm{d}\,(\boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{u}t)\quad \boldsymbol{f}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{f}\quad \mathrm{d}\,(\boldsymbol{u}t)\quad \mathrm{d}e_p\quad \boldsymbol{f}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t。$$

$$\mathrm{d}E_k\quad \mathrm{d}E_p\quad \mathrm{d}e_k\quad \boldsymbol{f}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t\quad \mathrm{d}e_p\quad \boldsymbol{f}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t\quad \mathrm{d}e_k\quad \mathrm{d}e_p, \mathrm{d}\,(e_k\quad e_p)\quad \mathrm{d}\,(E_k\quad E_p), \mathrm{d}e\quad \mathrm{d}E\quad 0.$$

所以，在小车系观察时，摆锤的机械能守恒。

设在 t=0 时刻摆锤位于最高点，此时为地面系和小车系的公共势能 0 点，则：

$$E_{\mathrm{k}}(0) \quad \frac{1}{2}mV^2 \quad \frac{1}{2}m \quad 0^2 \quad 0，E_{\mathrm{p}}(0) \quad 0，E(t) \quad E_{\mathrm{k}}(t) \quad E_{\mathrm{p}}(t) \quad E_{\mathrm{k}}(0) \quad E_{\mathrm{p}}(0) \quad 0 \quad 0 \quad 0.$$

$$e_{\mathrm{k}}(0) \quad \frac{1}{2}mv^2 \quad \frac{1}{2}m(\quad u)^2 \quad \frac{1}{2}mu^2，e_{\mathrm{p}}(0) \quad 0，e(t) \quad e_{\mathrm{k}}(t) \quad e_{\mathrm{p}}(t) \quad e_{\mathrm{k}}(0) \quad e_{\mathrm{p}}(0) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad 0 \quad \frac{1}{2}mu^2.$$

说明：1. 摆线的约束力是一个保守力，在小车系做功同时改变摆锤的动能和势能，不改变摆锤的机械能，与直接计算重力机械能得出的结果一致。建议教材明确指明——**光滑约束中的约束力是一个保守力**，不要认为力学中的保守力只有弹簧弹力、万有引力和重力，把约束力当成外力，在一个惯性系里不做功，在另一个惯性系里做功，这样机械能守恒定律就不满足力学相对性原理了，参见文献[1～15]。这个习题自从文献[4～5]提出以来，力学界讨论 50 多年一直未能定论，原因之一在于没有认识到约束力也是一个保守力，文献[16]早就提出了约束力是一个保守力的问题。**流体力学中推导伯努利方程时曾经利用了理想流体的压力是保守力。**

2. 在上面的单摆问题中势能包括重力势能，不是严格意义上的重力势能，因为质点受到的合力不等于重力。在本题中摆线的拉力是一个保守力，因此本题是两个保守力共同作用下的机械能守恒问题，摆锤的重力势能+摆锤的拉力势能+摆锤的动能=摆锤机械能的守恒量，在地面系摆锤的拉力势能恒为 0，就成为重力机械能守恒的问题。在这个问题中，在小车系看来可以认为是重力机械能不守恒，不能认为是机械能不守恒。在这个问题中如果按照重力机械能计算是开放系统，按照机械能计算是孤立系统。在单摆问题中，是一个完整、理想、双侧束的质点，约束力不改变质点的机械能；考虑摆线质量，是具有完整、理想、双侧束的质点系，约束力也不改变系统的机械能。

当观察者相对于单摆静止时，利用重力机械能守恒定律得出的结果等效；当观察者相对于单摆的悬挂点匀速运动时，直接利用重力机械能守恒定律是错误的，应该利用保守力所做的功等于势能的减少来计算。在小车系看来，摆线的作用力并不始终与位移垂直，摆线的作用力也做功，同时改变了摆锤的动能和势能，不改变摆锤的机械能，机械能守恒定律中的保守力应该是保守力的合力，考虑了势能就不能再计算保守力的功了，本题中如果按照重力机械能计算显然不满足力学相对性原理，参见文献[1～15]。

3. 有的力学教材中有这样一个实例——在一个相对于地面匀速上升的电梯底部静止放置一个物体（视为质点），在电梯内的观察者看来，没有任何力对质点做功，动能和势能（取电梯的底部为势能零点）均为 0，机械守恒；在地面的观察者看来，电梯底部对于质点的支持力做功，动能不变，势能不断增加（取地面为势能零点），机械能不守恒。其实这种分析是错误的，在地面系看来电梯的支持力也是一个保守力（很容易证明当电梯上升和下降相同的高度时，支持力做功之和为 0，满足保守力定义。），重力势能增加量等于支持力势能减少量，质点受到的合力为 0，总势能不变，动能也不变，因而机械能守恒，机械能守恒定律满足伽利略变换。重力机械能不守恒，不代表机械能（力学能）不守恒。**有些分析力学教材认为光滑约束中的约束反力与实位移垂直，约束反力不做功，这是不完善的，因为约束反力在一个惯性系里不做功，在另一个惯性系里可能做功，完整的表述应该为——光滑约束中的约束反力不改变质点的机械能，这样就适用于所有的惯性系了。在分析力学中可以认为是重力机械能问题。直线匀加速度参考坐标系和匀角速度定轴转动参考坐标系，其惯性力为保守力，可以证明此时在非惯性系里光滑约束中的约束反力也不改变质点的机械能。**

4. 机械能守恒定律是牛顿定律的推论，牛顿第二定律中的力是指质点受到的合力，因此机械能守恒定律中的保守力应该是指保守力的合力，因此本题不是重力机械能问题。在这个问题中如果按照重力机械能计算是开放系统，按照机械能计算是孤立系统。

5. 按照外场（外势能）计算，势能属于质点，一个保守力的功等于势能的减少，势能是坐标的函数，势能不是伽利略变换的不变量；按照内场计算，势能属于系统，一对保守力的功等于势能的减少，势能是相对位置的函数，势能是伽利略变换的不变量。二者有着本质的区别，量变引起质变，建议力学教材明确指出。本题中地球和摆锤的质量相差极其悬殊，按照内场（内势能）计算，不具有可操作性，此时地面系不再是惯性系，机械能也不守恒。

6. 机械能守恒定律成立的条件就是质点只受到保守力，对于同一个物理过程，在一个惯性系里能量守恒，在另一个惯性系里能量也一定守恒，如果只有保守力则为机械能，改变目前各种力学教材与文献的多种表述，这样经典力学的理论就更加和谐对称。证明：根据动能定理，设质点只受到保守力的作用，质点从 B 点到 A 点的过程中保守力合力的功为 W，$W \quad E_{\mathrm{k1}} \quad E_{\mathrm{k0}}$，$E_{\mathrm{k1}}$ 是 A 点的动能，E_{k0} 是 B 点的动能。根据势能定理，$W \quad E_{\mathrm{p0}} \quad E_{\mathrm{p1}}$，$E_{\mathrm{p1}}$

是 A 点的势能，E_{p0} 是 B 点的势能。所以 E_{k1} E_{p1} E_{k0} E_{p0}。

7. 地面系和小车系在起始时刻的势能零点重合，任何时刻小车系势能零点是地面系势能零点的伽利略像点，这是相对性原理的要求。斜面问题与单摆处理方法相似[17]，这个问题在国际上也比较纠结[18]。文献[19]证明了弹簧振子机械能在所有的惯性系机械能都守恒，文献[20]自由落体运动机械能在所有的惯性系机械能都守恒，文献[21]万有引力机械能在所有的惯性系机械能都守恒，文献[22]证明了能量守恒定律和动量守恒定律在牛顿力学和狭义相对论中都具有协变性，文献[23]利用内势能计算斜面问题得出机械能守恒定律具有伽利略变换的不变性，类似地也可以分析单摆问题得出机械能守恒定律在所有的惯性系都成立，有兴趣的读者自己分析，本文从略。

科学发展的历史表明，一个成功的理论是来源于科学实验和科学观测，随着观测事实的累积，一方面使理论得到更广泛的证实，另一方面必然会暴露出理论的局限性，从而迫使理论朝着更深刻和更普遍的方向发展。所谓更普遍就是要求新理论能概括更多的观测事实，从而扩大了理论的适用范围，但在旧理论的适用条件下，必然能返回到旧理论所能描述的全部特征，这也是衡量一个理论正确与否的重要判据之一。

Reference 参考文献:

1. 蔡伯濂。关于力学相对性原理与机械能守恒综述[J]。大学物理，1994，(13)1：20～22。
2. 何红雨。机械能守恒定律与惯性参照系的选择[J]。广西物理，1997，(18)3：27～29。
3. 金若兴。机械能守恒定律的条件。 物理教学，1985 年 1 月。
4. 熊秉衡。在不同惯性系中的机械能守恒定律。物理通报，1964（6）：261～264。
5. 熊秉衡。“在不同惯性系中的机械能守恒定律”一文的更正与补充。物理通报，1965（3）：116～117。
6. 施肖铮。在不同惯性系中的机械能守恒定律。常州信息职业学院学报，2002 年 12 月，第 1 卷第 2 期。
7. 丘基瑶。 机械能守恒定律与惯性参考系的变换。佛山科学技术学院学报(社会科学版)，1983（00）。
8. 王开放。机械能守恒定律的条件。开封教育学院学报，2003，23（4）：38～39。
9. 刘瑞金。有关机械能及其守恒律的研究评述。淄博师专学报，1995（12）：22～26。
10. 易双萍。不同惯性系中的力学规律。工科物理（现名：物理与工程），1998 年第 8 卷第 5 期：18～22。
11. 赵坚。机械能守恒定律理解中一个值得重视的问题[J]。物理通报，2006，(25)6：19～21。
12. 钱广东。不同惯性系中机械能不一定都守恒——兼谈机械能守恒定律是否服从力学相对性原理[J]。物理教学，2006，(28)2：42～43。
13. 白静江。两体问题中的功能原理及机械能守恒定律[J]。大学物理，1997，(16)3：11～14。
14. 孙国标，杨丽芬。也谈机械能守恒的相对性[J]。物理教师，2006，(27)12：32～33。
15. 李伟铎。对“重力机械能守恒定律在各惯性系都成立”的商榷。物理通报（增刊 1），2016（5）：110～112，115。
16. 马忠义。物体在约束运动中的功和能。沈阳化工学院学报，1989（3）2：117～122。
17. 张翠。斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解。物理通报，2016(9)：115～117。
18. Santos FC， Soares V and Tort AC。 A note on the conservation of mechanical energy and the Galilean principle of relativity [J]。 European Journal of Physics。 2010，31(4):827～834。
19. 李学生，师教民。对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷[J]。物理通报，2014(9)：119～120。
20. 赵文桐，刘文芳，刘明成。重力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]。物理通报，2015(3)：96～98。
21. 刘明成，赵文桐，刘文芳。引力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]。物理通报，2015(6)：123～124。
22. 李子军，李根全，白旭芳。牛顿力学形式和相对论力学的协变性。 大学物理，第 21 卷第 6 期，2002（60）: 22～23，39。
23. 王志成，康旭红，王增发。不同惯性参考系中系统机械能是否守恒的再讨论——兼谈机械能守恒定律满足伽利略相对性原理。 物理教师，2019（8）：60～62，64。

9/22/2020