Academia Arena

Websites:
http://www.sciencepub.net/academia
http://www.sciencepub.net

Emails:
aarena@gmail.com
editor@sciencepub.net

MARSLAND PRESS
Multidisciplinary Academic Journal Publisher

对一道困扰力学界 30 多年习题的思考

李学生

山东大学物理学院，济南，山东 250100，中国
diancizhiliang@163.com

Abstract: 摘　要：分析了关于外势能的弹性势能机械能守恒定律满足力学相对性原理，也具有单独的协变性，弹性势能不具有伽利略不变性，解决了关于这个问题的争论。

[李学生. **对一道困扰力学界 30 多年习题的思考.** *Academ Arena* 2020;12(8):1-5]. ISSN 1553-992X (print); ISSN 2158-771X (online). http://www.sciencepub.net/academia. 1. doi:10.7537/marsaaj120820.01.

Keywords: 关键词：轻质弹簧；伽利略不变性；力学相对性原理；机械能守恒

中图分类号：O 313.1　　　　　　　　文献标识码：A

参考文献[1～23]都有这样一个题目：

一质量为 m 的小球与一劲度系数为 k 的轻质弹簧相连组成一体系，置于光滑水平桌面上，弹簧的另一端与固定墙面相连，小球做一维自由振动。试问在一沿此弹簧长度方向以速度 u 相对于作匀速运动的参考系里观察，此体系的机械能是否守恒，并说明理由。

解：假设地球质量为充分大，**忽略地球能量的变化，按照外场计算，此时一个保守力的功等于质点势能的减少。**

在地面参照系上观察时，小球的平衡位置为坐标原点，以水平向右的直线 ox 为 x 轴，建立直线坐标系如图 1 所示。

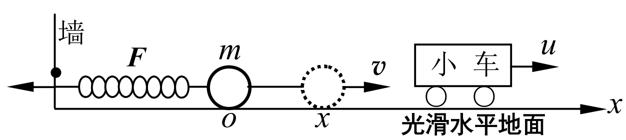

图 1　弹簧振动振子机械能守恒问题新解

当 $t \quad 0$ 时刻，将小球向右拉至最大振幅并放手，使之做简谐振动，则小球的位移为：

$x \quad A\cos(\omega t)$，其中 $\omega^2 \quad k/m$，$k \quad m\omega^2$.

设小球的速度为 v，加速度为 a，受到的力为 f，动能为 $E_k(t)$，势能为 $E_p(t)$，机械能为 $E(t)$．则有：

$$v \quad \frac{dx}{dt} \qquad \omega A\sin(\omega t),\ a \quad \frac{dv}{dt} \qquad \omega^2 A\cos(\omega t),\ f \quad ma \qquad m\omega^2 A\cos(\omega t) \qquad kx.$$

$$E_k(t) \quad \frac{1}{2}mv^2 \quad \frac{1}{2}m[\quad \omega A\sin(\omega t)]^2 \quad \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t) \quad \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t). \tag{1}$$

$$dE_p(t) \qquad f\,dx \quad kx\,dx \quad d\left(\frac{1}{2}kx^2\right),\ E_p(t) \quad \frac{1}{2}kx^2 \quad C.$$

将初始条件 $t \quad 0$ 时，$x \quad A$，$E_p(0) \quad \frac{1}{2}kA^2$，

代入上式得：

$$\frac{1}{2}kA^2 \quad E_p(0) \quad \frac{1}{2}k \quad A^2 \quad C，C \quad 0，E_p(t) \quad \frac{1}{2}kx^2 \quad C \quad \frac{1}{2}kx^2 \quad 0 \quad \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t). \qquad （2）$$

$$E(t) \quad E_p(t) \quad E_k(t) \quad \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) \quad \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t) \quad \frac{1}{2}kA^2 \quad 常数。 \qquad （3）$$

设地面参照系和沿此弹簧长度方向以速度 u 作匀速运动的参考系（设为小车，见图 1）刚开始相对运动时完全重合，开始相对运动后，当 $t \quad 0$ 时刻，将小球向右拉至最大振幅并放手，使之做简谐振动。

直觉判断：

因为小球在最大位移处以匀速度量值 u 相对于小车沿 x 轴负向运动，我们规定此时地面系和小车系的势能相等，所以在小车参照系上观察（即以小车参照系为静止系）时，弹簧振子体系（或小球）的机械能比在地面参照系上观察时，增加 $\frac{1}{2}m(\quad u)^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$，所以在小车参照系上观察时，弹簧振子体系（或小球）的机械能为：$E_1(t) \quad E\ (t) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad \frac{1}{2}kA^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$ 常数。所以在小车参照系上观察时，弹簧振子体系（或小球）的机械能守恒，守恒值为 $\frac{1}{2}kA^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$，这里采用特殊点判断，下面给出一般证明。

数学推导：

引理：力的保守性具有伽利略变换的不变性。

在两个相对匀速运动的惯性系 o，O_1 中，如果 o 系中力 $\boldsymbol{f}$ 是保守力，那么在 O_1 系中该力 $\boldsymbol{F} \quad \boldsymbol{f}$ 也是保守力。

证明：

设 0 时刻惯性系 o，O_1 完全重合，且 O_1 系相对于 o 系以正常数 u 的匀速开始运动。设 t 时刻，质量为 m 的质点在惯性系 o 的位矢、速度、加速度、受的力、做的功中分别为：$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{f}$，w，在 O_1 系中分别为：$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{F}$，W，则据微分运算有

$$\boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{u}t，\boldsymbol{V} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{u}，\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{a}，\boldsymbol{F} \quad m\boldsymbol{A} \quad m\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{f}; \mathrm{d}\boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{V}\mathrm{d}t \quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}t \quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t.$$

$$\mathrm{d}W \quad \boldsymbol{F} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{f} \quad (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t) \quad \boldsymbol{f} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{u} \quad m\boldsymbol{a}\mathrm{d}t \quad \mathrm{d}w \quad m\boldsymbol{u} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{v} \quad \mathrm{d}w \quad m\mathrm{d}(\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v}),$$

$$\int_0^W \mathrm{d}W \quad \int_0^w \mathrm{d}w \quad \int_{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}} m \ \mathrm{d}(\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v})，W \quad w \quad m\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad m\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v}_0.$$

由 $\mathrm{d}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{a}\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ 知，$W \quad w \quad m\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad m\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v}_0 \quad w_1(\boldsymbol{t}) \quad m\boldsymbol{u} \quad q(\boldsymbol{t}) \quad m\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v}_0 \quad j\ (\boldsymbol{t})$，

由于 $\boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{u}t=\boldsymbol{r}\ (\boldsymbol{t}) \quad \boldsymbol{u}t=\phi(\mathbf{t})$ 是关于时间 t 的连续函数，质点在任何时刻的速度都是唯一存在的，因此 $\boldsymbol{R} \quad \phi(\mathbf{t})$ 也是可导函数， 如果该函数出现常值函数区间，质点静止，受到的力是 0，不是显含时间的力，下面不研究这个区间，去掉该常值函数区间，该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间，设 D 是该函数的任意一个单调区间，根据反函数的定义在该区间上存在反函数 $t=\phi^{-1}(R)$，在区间 D 上 $W=j\ (t)=\boldsymbol{j_1}(\boldsymbol{R})$ 是位置的函数，对时间的偏导数等于 0，$\boldsymbol{F}$ 是保守力。由于在任意单调区间上成立，所以该结论在任何位置都成立，$\boldsymbol{F} \quad m\boldsymbol{A} \quad m\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{f}$ 是 O_1 系中的**保守力**。

力的保守性具有伽利略变换的不变性，有时表达式中含有时间 t，但是通过伽利略变换可以消去，此时不是显含时间的力，纠正某些文献和力学教材中错误的表述。

不要认为在力的解析式中有时间变量就认为一定是显含时间的力场，必须分析一下能否消去变量 t，表示为位置的一元函数，例如当把弹簧振子固定在地面上时，在地面系观察弹力 $F=-kx=-\frac{1}{2}kx-\frac{1}{2}kA\sin(\omega t+\phi)$，但不是显含时间的力场，否则地面系机械能也不守恒。

设在小车参照系上观察时，小球的位移、速度、加速度、受到的力、动能、势能、机械能分别为 x_1，v_1，a_1，f_1，$E_{1k}(t)$，$E_{1p}(t)$，$E_1(t)$．则有：

$x_1 \quad x \quad ut \quad A\cos(\omega t) \quad ut$，$v_1 \quad \dfrac{dx_1}{dt} \quad \omega A\sin(\omega t) \quad u$，$a_1 \quad \dfrac{dv_1}{dt} \quad \omega^2 A\cos(\omega t) \quad a$，$f_1 \quad ma_1 \quad ma \quad m\omega^2 A\cos(\omega t) \quad kx$．（说明：$f_1 \neq \quad kx_1$，胡克定律不具有伽利略变换的不变性，胡克定律不是牛顿定律的推论，不代表经典力学不满足力学相对性原理）。

$$E_{1k}(t) \quad \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \frac{1}{2}m[\quad \omega A\sin(\omega t) \quad u]^2 \quad \frac{1}{2}m[\omega^2A^2\sin^2(\omega t) \quad 2\omega uA\sin(\omega t) \quad u^2]$$

$$\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t) \quad m\omega uA\sin(\omega t) \quad \frac{1}{2}mu^2. \tag{4}$$

根据引理可以得出在小车系弹力还是一个保守力，势能定理可知

$$dE_{1p}(t) \quad f_1 dx_1 \quad kx d(x \quad ut) \quad kx dx \quad kuA\cos(\omega t)dt \quad d\left[\frac{1}{2}kx^2 - m\omega uA\sin(\omega t)\right],$$

$$E_{1p}(t) \quad \frac{1}{2}kx^2 \quad m\omega uA\sin(\omega t) \quad C.$$

将初始条件 $t \quad 0$ 时 $x_1 \quad x \quad A$，$E_{1p}(0) \quad E_p(0) \quad \frac{1}{2}kA^2$，

代入上式得：$\frac{1}{2}kA^2 \quad E_{1p}(0) \quad \frac{1}{2}kA^2 \quad m\omega uA\sin(\omega \quad 0) \quad C$，$C \quad 0$，$E_{1p}(t) \quad \frac{1}{2}kx^2 \quad m\omega uA\sin(\omega t) \quad C$

$$\frac{1}{2}kx^2 \quad m\omega uA\sin(\omega t) \quad 0 \quad \frac{1}{2}kx^2 \quad m\omega uA\sin(\omega t) \quad \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t \quad m\omega uA\sin(\omega t). \tag{5}$$

因此势能是时间 t 的一元函数.

$$E_1(t) \quad E_{1p}(t) \quad E_{1k}(t) \quad \frac{1}{2}kx^2 \quad m\omega uA\sin(\omega t) \quad \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t) \quad m\omega uA\sin(\omega t) \quad \frac{1}{2}mu^2$$

$$\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) \quad \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad \frac{1}{2}kA^2 \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad \text{常数}. \tag{6}$$

所以在小车参照系上观察时，弹簧振子体系的机械能仍然守恒，守恒值为 $\frac{1}{2}kA^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$。

当 u=0 时两个坐标系重合，守恒值相等。从上述推导可以看出两点：当 $u\neq 0$，只有 $\omega t \quad n\pi$，$n\in N$ 时才有：$E_p(t) \quad E_{p1}(t)$；当 u=0 时，二者显然相等，这也符合玻尔的对应原理。

经典弹性势能公式的局限性分析

$E_{p1}(t) \quad \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t \quad m\omega uA\sin(\omega t)= \frac{1}{2}kx^2 \quad m\omega uA\sin(\omega t)= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad m\omega uA\sin(\omega t)$应该是惯性系中弹簧振子弹性势能的一般公式（参考系相对于地面变速运动也可以得出一个势能公式，但是此时测量的机械能不再守恒，不是本文的研究范围，在此从略），没有否定经典的弹性势能公式，原来的公式只是一个特例——观察者在弹簧弹力方向上没有位移或者说分速度为 0（相对于固定点静止或者垂直于弹力方向上匀速运动），不能认为弹性势能对于所有的观察者都相同，需要根据“物体的势能增加量等于物体克服保守力做的功”重新计算，当观察者在力的方向上分速度不相等时，计算保守力做的功不相等，因此势能差也应该不相等，这说明弹性势能和重力势能一样具有相对性。

如果坚持 $E_p \quad \frac{1}{2}kx^2$ 适用于所有情况，由于弹簧的形变是伽利略变换不变量，因此部分文章坚

持认为弹性势能差对于不同的观察者不变，才出现了机械能不守恒的错误结论，为了解释这个问题人们提出了机械能守恒定律可以不满足力学相对性原理或者满足力学相对性原理，但不具有单独协变性的错误的理论。也有人在功能原理中直接去掉外势能的概念，认为引入外势能们没有必要。

胡克定律 F=kx，在这里是实数与矢量（向量）的积，x 是弹簧的形变，是一维矢量，弹性势能应该是 dE_{p} $kx \cdot dx_1$，在这里是数量积（标量积），当观察者在弹力方向上的分速度为 0 时，$x = x_1$，便得出了 E_{p} $\frac{1}{2}kx^2$；当观察者在弹力方向上的分速度不为为 0 时不是始终相等的，胡克定律不具有伽利略变换的不变性，但由于胡克定律不是牛顿定律的推论，不影响牛顿力学体系的基础，如果此时利用 $dE_{\mathrm{p}1}=kx_1 \cdot dx_1$ 计算弹性势能就错了，这样计算力就不是伽利略变换的不变量了。文献[6]和[14～18]的解法与答案与本文相同。

主要结论——通过本文得出了关于弹性势能的机械能守恒定律不但满足力学相对性原理，而且具有单独的协变性，对于内势能势能差是伽利略变换的不变量，对于外势能势能差不是伽利略变换不变量。经典的外势能的弹性势能公式仅适用于观察者在弹力所在直线上的分速度为 0 时的情形，弹性势能不仅与弹簧的形变有关，也与观察者有关（能量是做功的能力，不同的观察者测量者可以不同），这是一个观察效应，类似于狭义相对论效应。

不少人错误地认为力的作用点在弹簧，才导致了这个问题争论了 30 多年[20]，弹簧振子问题类似于重力场，我们一般不把地球对于重力场的作用力和重力场对于质点的作用力看做两个力重复计算，单摆问题中我们也不把悬挂点对于摆线的作用力和摆线对于摆锤的作用力看做两个力，因为摆线也不考虑质量。弹簧振子和单摆类似于质点(有质量无体积)是理想化模型，不存在所谓的实体模型，因为没有质量我们无法制作弹簧和摆线，这是为了研究问题的需要，抓住主要矛盾，忽略次要因素造成的。

现在不少教材没有注意强调这个问题，甚至研究弹簧具有质量的弹簧振子问题，有人误认为是弹簧具有质量，不考虑质量，但是具有弹力和内部结构，内部的力与墙壁的作用力相平衡，显然是错误的，没有质量哪来的内部？墙壁的作用力和内力除非始终是平衡力，否则加速度会出现无穷大，即使是平衡力各点都匀速运动，这显然不符合现实。在弹簧振子问题中约束反力和保守力是同一个力，类似于匀速圆周运动中约束反力和保守力是同一个力。不具有质量的弹簧问题称为谐振子，是质点动力学问题，可以在大中学教材中提出，弹簧具有质量可以供专家研究。在弹簧振子问题中，是一个完整、理想、双侧束的质点，约束力不改变质点的机械能；考虑弹簧质量，是具有完整、理想、双侧束的质点系，约束力也不改变系统的机械能。

关于功的定义曾经有两种说法——质点的位移与力的标量积、力的作用点的位移与力的标量积，如果考虑到力的作用点必须具有质量，二者是一致的，文献[20]也认可“功是质点位移与力的标量积”。势能是用质点受到保守力的功定义的，对于没有质量的弹簧根本没有势能而言。现在不少大中学教材甚至高考都提轻质弹簧的弹性势能，这是不严密的，建议教材一定说明，势能属于质点，有人担心势能为何不影响质量，其实动能对于质量的影响在经典力学中也是忽略的。

参考文献:

1. 高炳坤。力学中一个令人费解的问题[J]。大学物理。1995（5）：20～24。
2. 李光惠，高炳坤。对“力学中一个令人费解的问题”的补充。1996（10）：44～45。
3. 赵凯华，罗蔚茵。新概念物理教程 力学[M]。北京：高等教育出版社，2000：124。
4. 高炳坤。能量追踪[J]。大学物理，2001（3）：15～16。
5. 高炳坤。一个保守力做的功等于势能的减少吗[J]。大学物理，2001（5）： 19～20。
6. 刘明成，刘文芳，赵文桐。弹力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]。物理通报，2015(12)：109～111。
7. 蔡伯濂。关于讲授功和能的几个问题，工科物理教学，1981（1），7～13。
8. 王立、张成华。机械能守恒定律具有伽利略变换不变性。 吉林师范大学学报（自然科学版），2004。3。
9. 郑金。对一道物理竞赛题的两种互异解答的探讨[J]。物理通报，2015(7)：109～112。
10. 裴永伟，籍延坤，吴振声。物理规律的协变性与可变性。沈阳大学学报，2005，（17）4，100～104。
11. 李兴毅，陈建，赵佩章，赵文桐。伽利略变换的物理意义。河南师范大学学报（自然科学版），2002（2）39～42。
12. 郑永令，力学（2004 年 1 月第 2 次印刷）：194 页。
13. 袁芳，朱炯明。功、动能和机械能。物理教学，2012（12）: 5～10。
14. 冯伟。机械能守恒定律与参照系——对力学中一个问题的讨论。 承德民族师专学报，1986(4): 73～74。
15. 李学生，师教民。对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷。 物理通报，2014（9）：119～

120。
16. 刘一贯。关于机械能守恒定律的协变性。华南师范大学学报（自然科学版），1985（1）：155～157。
17. 刘敏，孙皆宜。再论机械能守恒。牡丹江教育学院学报，2005（5）：26，34。
18. 赵志栋，陈光红。轻弹簧之“困境”。物理通报，2016（5）：98～101。
19. 唐龙。例说能量的系统性和相对性。物理教师，2016（6）：18～19。
20. 蔡伯濂。关于讲授功和能的几个问题[J]。工科物理教学，1981(1)，7～13。
21. 冉婷，余杰，兰小刚。 惯性参照系的选择与机械能守恒。物理教学探讨，2017(9)。
22. 易双萍。不同惯性系中的力学规律。工科物理（现名：物理与工程），1998 年第 8 卷第 5 期：18～22。
23. 赵坚。关于与机械能守恒相关的一些问题的探讨。物理教师，2019，40（5）：62～65。

Reflections on the Exercise of Over 30 Years Troubling the Mechanics Circle

Li Xuesheng

School of Physics, Shandong University, Jinan, Shandong 250100, China
diancizhiliang@163.com

Abstract: The article analyzed mechanical energy conservation of elastic potential of external potential satisfying mechanical relativity fundamental and possessing independent covariant idiosyncracy as well. Elastic potential does not satisfy Galileo invariability， which clarified argument about the issue.

Key words: light spring; Galileo invariability; mechanical relativity fundamental; mechanical energy conservation.

8/16/2020