Websites:
http://www.sciencepub.net/academia
http://www.sciencepub.net

Emails:
aarena@gmail.com
editor@sciencepub.net

Academia Arena

MARSLAND PRESS
Multidisciplinary Academic Journal Publisher

机械能守恒定律是质点动力学规律——力学相对性原理与机械能守恒定律的关系研究综述

李学生

（山东大学物理学院 山东济南 250100 Email:1922538071@qq.com dianciziliang@163.com）

Abstract 摘要：机械能守恒定律与力学相对性原理关系的研究国内是从 1964 年熊秉衡发表《在不同惯性系中的机械能守恒定律》开始讨论的，此后国内外各家杂志纷纷讨论，一直没有定论，分为三个学派：㈠机械能守恒定律不满足力学相对性原理；㈡机械能守恒定律满足力学相对性原理，但是不具有单独的协变性，因为对于同一个物理过程在一个惯性系里满足机械能守恒的条件，在其他惯性系里可能不满足守恒条件（机械能守恒条件各本教材描述并不一致）；㈢机械能守恒定律满足力学相对性原理.本人通过研究并查阅大量的文献，认为只要修改经典力学表述部分描述，机械能守恒定律满足力学相对性原理，主要结论如下：①势能分为外势能和内势能，外势能不具有伽利略变换的不变性；势能属于系统，势能是相对位置的函数只适用于内势能，建议力学教材删除或说明；②把地球看做惯性系的同时默认其质量充分大，忽略其能量的变化；③力可以分为保守力、耗散力、显含时间的力，约束力是保守力；④只要质点受到弹力就具有弹性势能；⑤相对性原理在物理学中具有核心地位，角动量守恒定律中需要引入角动量势才满足力学相对性原理；⑥功是力与质点位移的数量积，力只能作用在有质量的点上，弹簧振子只需研究质点即可；⑦相对性原理和单独的协变性是一回事，无需进行区别；⑧经典的伯努利方程仅仅适用于静止系，推广后可以适用于所有的惯性系；⑨声波运动方程具有伽利略变换的不变性；⑩机械能守恒条件——系统里只有保守力，机械能守恒定律满足力学相对性原理，牛顿运动定律满足伽利略变换是机械能守恒定律满足伽利略变换的充分条件. 文章系统地阐明了机械能守恒定律无条件服从力学相对性原理.这本书的震撼在于在物理学高度发展的今天，作为物理学发源地的经典力学还存在着表述不完善的问题，这提醒着我们在任何学习研究中都应当保持着开放的态度.

[李学生. **机械能守恒定律是质点动力学规律——力学相对性原理与机械能守恒定律的关系研究综述.** *Academ Arena* 2020;12(7):42-83]. ISSN 1553-992X (print); ISSN 2158-771X (online). http://www.sciencepub.net/academia. 7. doi:10.7537/marsaaj120720.07.

Keywords 关键词：机械能守恒定律；力学相对性原理；势能公式；势能定义；质点动力学
中图分类号：O 313.1　　　　**文献标识码：**A

The law of conservation of mechanical energy is the law of particle dynamics—A review ofresearch to the relationship between the principle of mechanical relativity and the Law of conservation of mechanical energy

Li Xuesheng

School of Physics，Shandong University，Jinan， Shandong 250100，China; Email:1922538071@qq.com
dianciziliang@163.com

Abstract: A review ofresearch to the relationship between the principle of mechanical relativity and the Law of conservation of mechanical energy.

Key words: Conservation of mechanical energy；Mechanics relativity principle； Potential energy formula；Definition of potential energy；Particle dynamics

目录

序言

伽利略说："我的目的是要阐明一门崭新的科学，它研究的却是非常古老的课题.也许，在自然界中最古老的课题莫过于运动了；例如观察到下落重物的自然运动是连续加速的."“把你和朋友关在一条大船下的主舱里，让你们带着几只苍蝇、蝴蝶和其他小飞虫，舱内放一只大水碗，其中有几条鱼，然后挂上一个水瓶，让水一滴一滴地滴到下面的一个宽口罐里，船停着不动时，你留神观察，小虫都以等速向舱内各方向飞行；鱼向各个方向随便游动；水滴滴进下面的罐中，你把任何东西扔给你的朋友时，只要距离相等，向这一方向不必比另一方向施更多的力.当船以任何速度前进，只要是匀速的，你将发现，上述观察的现象依旧，你无法用任何现象判定船是运动还是不动……” [99]相对性原理不是一个物理理论，而是对于物理理论的一个要求，满足相对性原理是一个理论成立的必要条件.

力学相对性原理是指任何惯性系在牛顿动力学规律面前都是平等的，能量守恒定律是自然界中普遍存在的规律，从宏观低速物体到微观高速的微粒，都符合能量守恒定律，能量的形式多种多样，有动能、势能、核能、热能等等，因此能量守恒定律可以具体到某种形式的能量的守恒律，比如在机械运动中的机械能守恒定律，因此机械能守恒定律是动力学的普遍规律，是牛顿运动定律的直接推论，理应满足力学相对性原理[1]，然而国内外力学界对于这个问题并没有取得一致的观点.机械能守恒定律与力学相对性原理之间的关系是一个古老而又宽泛的问题，至于从何时开始讨论，不好查证，文献[2～3]是笔者所能查到的国内最早文献.

著名物理学家迈克尔逊认为:“当然无法绝然肯定物理科学不再会有像过去那么惊人的奇迹，但非常可能的是大部分宏伟的基本原理业已确立，而今后的进展仅在于将这些原理严格地应用于我们所关注的现象上.在这里测量科学的重要性就显示出来了——定量的结果比定性的结果更为可贵.一位卓越的物理学家曾经说过，物理科学未来的真理将在小数点六位数字上求索."然而温伯格(S.Weinberg)在他的《引力论和宇宙论--广义相对论的原理和应用》一书的开篇，写下这样一段话:“物理学并不是一个已完成的逻辑体系.相反，它每时每刻都存在着一些观念上的巨大混乱，有些像民间史诗那样，从往昔英雄时代流传下来；而另一些则是像空想小说那样，从我们对于将来会有伟大的综合理论的向往中产生出来."爱因斯坦也认为：“物理学构成一种处在不断进化过程中的思想逻辑体系."下面就研究过程中出现的问题简要总结如下，期望得到各位专家的指导.**这个问题其实是大多数经典力学教材表述不完善的地方，50多年来力学专家不敢跨越雷池一步，科学家们和核心期刊错误地认为这是一个教学问题，没有价值研究，这样就造成了无休止的争论.**力学书籍最好明确指出这些问题，丰富和完善经典力学的表述形式，不要再使读者发生误解，本文列举的实例均不考虑非保守力的因素.

1 相对性原理在物理学中的核心地位

对于正确的物理定律来说，满足协变性是必要的但不是充分的.这是合乎逻辑的，任何一个正确的命题，它的逆命题不一定成立，而逆否命题一定成

立.相对性原理在物理学中的权威性就由它的逆否命题表述来体现，它有否决权，不满足一定不正确.爱因斯坦讲:“狭义相对论的普遍原理包含在这样一个假设里：物理定律对于（从一个惯性系转移到另一个任意选定的惯性系的）洛仑兹变换是不变的.这是对自然规律的限制性原理，它可以与不存在永动机这样一条作为热力学基础的限制性原理相比拟.”

用现代的术语来概括，伽利略相对性原理可表述为：一个对于惯性系作匀速直线运动的其它参考系，其内部所发生的一切物理过程，都不受到系统作为整体的匀速直线运动的影响或者说不可能在惯性系内部进行任何物理实验来确定该系统作匀速直线运动的速度.既然对于惯性系作匀速直线运动的系统内遵从同样的物理学规律，由此可得出结论：相对于一切惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系，也就是对于物理学规律来说，一切惯性系都是等价的. 牛顿对于伽利略的相对性原理也是肯定的.在《自然哲学之数学原理》一书中，“运动的公理或定律”的第五推论指出：“一个给定的空间，不论它是静止，或是不含圆周运动的匀速直线运动，它所包含的物体自身之间的运动不受影响.”牛顿还特地说明：“这可以由船的实验来清楚地证明，不论船是静止或匀速直线运动，其内的一切运动都同样进行.”牛顿在发现的引力前面，加了二个字，叫万有引力.目的就是表明，引力对所有的物体，在所有的时间和空间都是适用的，是普遍成立的.至今没有发现，万有引力定律只对地球适用，在其他天体就不成立，当然现在需要对牛顿的万有引力定理进行相对论效应的修正.所有现在没有被推翻的物理规律，都是对相对性原理的证明.相对性原理是整个自然科学生存的基础，基础是不可动摇的，不可错误的.发生错误的只可能是从一个时空变换到另一个时空所采用的变换方式，在这种变换方式下能否使自然界的规律保持不变.牛顿力学在伽利略变换下保持力学规律不变.爱因斯坦在建立理论体系之前，先追求数学上的完美性.对于数学上不完美的理论，则将其拒之门外，爱因斯坦建立的理论属于对称性理论.在发现光速不变之后，爱因斯坦认为只有在洛伦兹变换下物理规律才能保持不变.在一个给定的参照系中的自然规律和一切实验结果都与整个系统的平动无关，更精确地说法是：存在着无穷多的互相作匀速直线相对的运动的三维等效欧几里得参照系，在这些参照系中，一切物理现象都是以等同的方式发生的.所以我们说，爱因斯坦方法可以称为相对自由或受对称性限制的方法.具体地说，即以实验和事实为依据，仅在对称性方案之中，选择最佳方案.

彭加勒在 1895 年提出了相对性原理的概念，认为物理学的基本规律应该不随坐标系变化.1904 年彭加勒正式表述了相对性原理.他在一次演说中讲道：“根据这个原理，无论对于固定的观察者还是对于正在作匀速运动的观察者，物理定律应该是相同的.因此没有任何实验方法可以用来识别我们自身是否处于匀速运动之中.”从历史上看，把相对性原理简称为协变性要求是从狭义相对论开始的.后来人们干脆把相对性原理称为协变性原理，但也一直有人把相对性原理称为不变性原理.前者在广义相对论中最为普遍，后者在经典力学中偶尔出现.

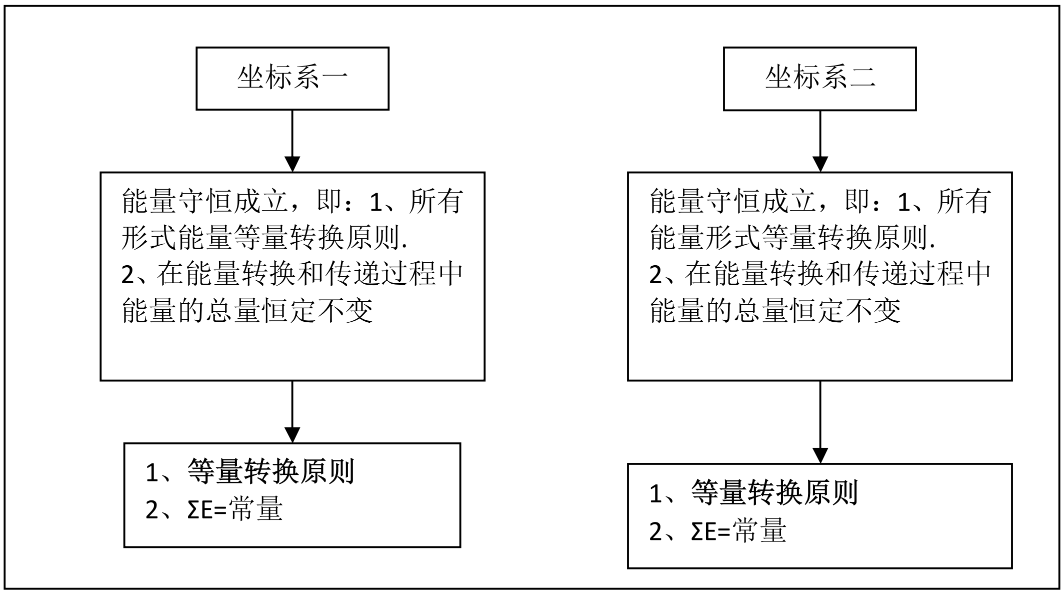
相对性原理说明物理规律在相对运动中是等效的，狭义相对性原理指出一切物理规律对于各种惯性系都是相同的，广义相对性原理则把它推广应用于任意相对运动的参照系.相对性原理是一种变换中的不变性(某种守恒)，它联系于空间的某种性质，例如均匀性，引力场与非惯性系的等价性等，它的数学形式是方程等的一般协变性.海森堡指出:“相对性原理构成一个十分普遍的自然规律”.对自然的研究和对自然力量的利用从一开始就是同使物体个体化联系在一起的.一个物体到另外一些物体的距离随时间发生变化.当这些“另外的”物体依然是所论物体的不可分割开来的背景的时候，我们就无法用数列对应于该物体的位置和位置的改变，也就是不能对物体的位置和速度施行参数化.给定一个物体，它相对于一些物体运动，标志出这些物体，然后用数列与这些距离相对应，于是这些物体就成为参照物，而给定物体到这些物体的距离的全体就成为参照空间.对应于距离的数之全体组成为一有序系统.这样同参照物联系在一起的坐标系，也就被引进来了.所谓相对性原理就是坐标系的平等性，从一个坐标系转换到另一个坐标系的可能性以及给出坐标变换时刚体内部的特性和刚体内部的各质点的距离及其结构的不变性.

近代科学表明，自然界的所有重要的规律均与某种对称性有关，甚至所有自然界中的相互作用，都具有某种特殊的对称性——所谓“规范对称性”.实际上，对称性的研究日趋深入，已越来越广泛的应用到物理学的各个分支：量子论、高能物理、相对论、原子分子物理、晶体物理、原子核物理以及化学（分子轨道理论、配位场理论等）、生物（DNA 的构型对称性等）和工程技术.在 20 世纪前的二百多年间，对称性与守恒律的关系未被人们发现，杨振宁认为其原因是:“在古典物理学中，这种关系尽管存在着，但不十分有用.当量子力学在 1925-1927 年间发展时，这种关系的重要性才实际上显露出来.在量子力学当中，动力学系统的态是用指明态的对称性质的量子数标记的.与量子数一起还出现了选择定则，它支配着在态之间跃迁时量子数的变

化……在 1925 年后对称性才开始原子物理学的语言中.后来，随着物理学的研究深入到核现象和基本粒子现象，对称性也渗入这些物理学新领域的语言中”.

从几何观点看来，空时理论可分为均匀的（伽利略的）空间理论和非均匀的（黎曼和爱因斯坦的）空间理论.空时的均匀性表现在存在着一类变换群，它使两点间的四维距离（间隔）的表达式不变，间隔表达式在空时理论中至为重要，因为它的形式直接与物理的基本定律，即自由质点运动定律和自由空间中光波波前传播定律的形式有关，因此朗道的书《力学》中说，在惯性参考系中自由运动的质点，由于时间和空间的均匀性和各向同性，表征它所用的拉格朗日函数不显含时间和广义坐标和速度的方向.伽利略空间具有最大限度的均匀性，这表现在：在伽利略空间中：(a)所有的点和瞬时都是平权的；(b)所有方向都是平权的；(c)所有作相对匀速运动的惯性系都是平权的.爱因斯坦认为：“如果不去相信宇宙的内在和谐，那就不存在有科学.”

2 能量守恒定律在现代自然科学中的核心地位



某些物理量守恒的想法渊源于西方的哲学思想.千百年来，人们通过对天体的观测，发现了宇宙天体的运动并没有减少的迹象.所以在１６－１７世纪，许多哲学家都认为宇宙间运动的总量是不变的.笛卡儿和莱布尼茨都是这种思想的宣传者，而且都致力于寻求一个合适的物理量来量度运动，以表达宇宙运动的守恒.笛卡儿提出，质量和速度的乘积，并把这个量叫做“运动量”.现在通常把这个量叫做动量，并且已经确立了动量守恒定律.可以说，笛卡儿社动量守恒定律的先导.莱布尼茨也相信某种与运动有关的量是守恒的，这就是他所说的“力”.他认为，应该用ＭＶ来量度力，并称之为“活力”.他还认为，物体静止了“活力”并没有损失掉，而是以某种形式储存起来.他把这种与静止状态相联系而储存起来的“力”称为“死力”.莱布尼茨的观点是机械能守恒定律的萌芽.此后近２００年的历史中，物理学界始终存在着ＭＶ和ＭＶ^{2}哪一个是真正的量度运动的量的争论.直到１９世纪，恩格斯科学地论述了两者的区别和运用范围，并结束了这场争论.牛顿时代的莱布尼兹研究过动能守恒，机械能中的势能直到1853年才由Rankine正式提出[100]，而在这之前焦耳和迈耶已经建立了现代意义上的能量守恒与转化定律. 永动机不可能实现的历史教训，从反面提供了能量守恒的例证，成为导致建立能量守恒原理的重要线索.至19世纪20年代，力学的理论著作强调“功”的概念，把它定义成力对距离的积分，并澄清了它和“活力”概念之间的数学关系，提供了一种机械“能”的度量，这为能量转换建立了定量基础.1835年哈密顿(W.R.Hamilton，1805—1865)发表了《论动力学的普遍方法》一文，提出了哈密顿原理.至此能量守恒定律及其应用已经成为力学中的基本内容.何谓守恒定律?美国物理学家Holton G曾这样论述:“在某确定环境中相互作用的一组物体无论发生什么样的变化,它的这种或那种可测度的量(质量、动量、能量或电荷) 的总和在整个观察期间都是恒定不变的.”[84]

能量守恒定律指出:“自然界的一切物质都具有能量，能量既不能创造也不能消灭，而只能从一种形式转换成另一种形式，从一个物体传递到另一个物体，在能量转换和传递过程中能量的总量恒定不

变".董光壁在《世界物理学史》中指出:"拉格朗日和哈密顿的工作使力学彻底摆脱了对几何学的依赖，成为完全分析的形式，并且以能量取代力的概念体系为力学在物理学领域的广泛应用开辟了道路."能量守恒原理所指出的只是什么样的运动是可能的，在物体运动的每一种情况下能量守恒原理都能得到一个方程，然而一个方程是不能单值地决定实际的运动.为此有多少表证运动的独立坐标就需要有多少方程，比如确定自由质点的运动就需要三个方程，最小作用量原理却提供了必要数量的方程.功能原理与能量守恒定律的本质是一致的，功能原理从属于能量守恒定律.

换位思考能量守恒与坐标变换的关系，分析能量守恒定律对坐标变换的要求，按照现代物理的说法，能量守恒只在每个参照系各自内部都有一套描述守恒的方法，它们都在自己的描述下承认能量守恒. 则必需要假设在二个坐标系能量守恒成立.

众所周知能量有多种形式如动能、势能、化学能、电磁能、核能等等，各种形式能量之间可以相互转换，都能参加物体之间的作用，而不同形式能量都有自己的数学表达式. 核能转化成动能、势能、化学能、电磁能是容易的，反向转换是很困难的. 高速对撞是电磁能先转化为被加速粒子的动能，然后对撞引发核反应，形成一些新的粒子，还伴有光辐射，这些粒子的核能加上其动能及热能以及光辐射，等于反应前被加速粒子的核能和动能的总量，从而只有部分转化为增加的核能，而化学能实质上是电磁能.

首先我们不难看出，由于能量有多种形式，人们不能保证自己已经知道了所有形式能量，要保证所有不同形式能量之间转换遵循等量转换原则，从数学上不可能每一种形式能量地证明. 能量守恒定律与动量守恒定律在封闭系统才成立，在开放系统就不成立.在开放系统要计入系统与外界的能量交换与动量交换问题.生物世界有一条普遍规律，就是尽可能节省能量.

3 力的作用点问题

力的大小、方向和作用点是力的三要素，但是必须本质地看待力的作用点问题，根据牛顿第二定律力必须作用在有质量的点上，因此在研究弹簧振子和单摆问题时必须注意这个问题.在弹簧振子中不能考虑弹簧质量（如果考虑弹簧质量，这种弹簧振子不是理想的振子，它的振动周期与弹簧的质量有着密切的联系，当我们把这种影响仅归于质量因素时，振子的周期可以写成与弹簧有效质量有关的表达式，实际上处理这类问题的方法有很多种，像四阶龙格——库塔法、瑞利法、传递矩阵法、求解波动方程法、试探法求解微分方程、机械能守恒近似法、迭代法等等，弹簧质量还是对弹簧振子的振动系统有一定的影响，而作为弹簧系统振动周期的一级近似，可以将弹簧质量 m_0 的三分之一有效质量加到振子的质量 m 上去，从而将弹簧质量为 m_0、振子质量为 m 的实际弹簧振动系统等效看作是一个具有质量为 $m+0.346m_0$ [4]的理想质量的弹簧振动系统，弹簧系统的振动周期为: $T=2\pi\sqrt{\frac{m+0.346m_0}{k}}$，此时在静止系测量到系统的机械能为 $E=E_k+E_p=\frac{1}{2}(m+0.346m_0)v^2+\frac{1}{2}kx^2$，$m_0$ 为弹簧的质量.不少文章不取 0.346 而取 1/3 作为一级近似，此时按照弹簧的质量均匀分布，事实上在运动过程中不可能均匀分布，而且需要考虑机械波的能量.），因此弹力的作用点是质点，而不是弹簧.当考虑弹簧质量时，可以宏观考虑为若干个受弹力作用的质点，必须研究弹簧的动能了.

现在不少力学教材在表述力的作用效果时一方面指出"力是改变物体运动状态的原因"，另一方面指出"力是物体产生形变的原因"，一些初学者往往认为力的作用效果有两种，其实二者本身是一致的，"力是改变物体运动状态的原因"此时物体看做质点."力是物体产生形变的原因"此时物体不能看做质点，组成物体的各个质点的运动状态也发生了改变，物体产生形变只是一个宏观效果，所以可以统一表达为"力是改变质点运动状态的原因". 正如科学史家丹皮尔在评论牛顿理论体系时所言:"牛顿赋予世界必面的惊人的秩序与和谐所给我们的美感上的满足，超过凭藉任何天真的常识观或亚里斯多德的谬误概念，或诗人们的神秘想象所见到的、万花筒式的混乱的自然界."

笔者认为可以给出势能的一般定义——由于质点受到有势力而具有的能量叫做势能，势能的定义式为 dEp=（$-f$）$\cdot$ dr（与 F= $\frac{\partial u}{\partial r}$ 等价），当有势力不显含时间(即为保守力)时，势能也可以称为位能.势能显含时间的充要条件是力场显含时间.

由于质点受到万有引力而具有的势能叫引力势能，由于质点受到重力而具有的势能叫重力势能，而把弹性势能定义为由于弹性形变具有的势能不具有和谐性.赵凯华认为:"研究一个规律的表述所具有的对称性，并设法消除某种不对称因素，从而使其规律的表述具有更多的对称性，这无疑是有重要意义的.因为它不仅满足人类对于美（对称，和谐）的心理追求，而且更重要的是使表述的规律具有更大的普遍性.

不少人错误地认为弹力的作用点在弹簧，才导致了这个问题争论了 30 多年[5～12]，弹簧振子问题类似于重力场，我们把地球对于重力场的作用力和重力场对于质点的作用力看做一个力计算，单摆问题中我们也不把悬挂点对于摆线的作用力和摆线对于摆锤的作用力看做两个力，因为摆线也不考虑质量.弹簧振子和单摆类似于质点(有质量无体积)是理想化模型，不存在所谓的实体模型，因为没有质量我们无法制作弹簧和摆线，这是为了研究问题的需要，抓住主要矛盾，忽略次要因素造成的.在某种意义上可以认为轻质弹簧和重力场、引力场一样可以传递力，因为它们也不考虑质量问题.

现在不少教材没有注意强调这个问题，甚至研究弹簧具有质量的弹簧振子问题，有人误认为是弹簧具有质量，不考虑质量，但是具有弹力和内部结构，内部的力与墙壁的作用力相平衡，显然是错误的，没有质量哪来的内部？墙壁的作用力和内力除非始终是平衡力，否则加速度会出现无穷大，即使是平衡力各点都匀速运动，这显然不符合现实.在弹簧振子问题中约束反力和保守力是同一个力，类似于匀速圆周运动中约束反力和保守力是同一个力.不具有质量的弹簧问题称为谐振子，是质点动力学问题，可以在大中学教材中提出，弹簧具有质量可以供专家们研究.

由于弹簧和质点联系在一起，如果等效认为势能属于弹簧，此时只需考虑弹簧一端受力即可，劲度系数也是按照一端受力定义的，另一端为固定端.下面利用反证法说明考虑墙壁的作用力，劲度系数依然按照 k 计算的错误——假设墙壁的作用力单独改变质点的机械能，与质点的作用力一样，根据对称性原理，必然改变弹簧的形变，那么弹簧的形变就不再是伽利略变换的不变量，以弹簧的伸长为例，如果考虑墙壁的作用，当质点运动到最大位移处，质点对于弹簧的拉力 F=kA.对于小车系，测量的力也是 F=kA，墙壁的拉力是 F_1=-kA，如果此时劲度系数依然按照 k 计算，此时弹簧的形变为 2A，这样弹簧的形变就不是伽利略变换不变量，显然是错误的.

轻质弹簧的性质定理：轻质弹簧虽然始终是两端受力而不是单端受力，但是计算轻质弹簧的形变和弹性势能时，可以有两种等效的方法：1.将轻质弹簧的一个端点视为相对静止，此时劲度系数为 k；2.将其中点视为相对静止，则可视为两根串联的弹簧，其劲度系数是 2k.

证明：1、当观察者在弹力所在直线上的分速度为 0 时

假设轻质弹簧所受外力为 F，我们可以从两个角度认识，一方面将轻质弹簧的一个端点视为相对静止，此时劲度系数为 k，形变为 x，我们当初定义劲度系数 k=F/x，弹性势能为 $\frac{1}{2}kx^2$；换一个角度如果认为弹簧是两端受力使弹簧发生形变，此时应该视为为两个劲度系数相同的弹簧串联，根据弹簧串联的知识可以知道这时每个轻质弹簧的劲度系数为 2k，弹性形变为 $\frac{1}{2}$ x，整个弹簧形变还是 x，弹性势能为 $\frac{1}{2}$ $k\ (\frac{1}{2}x)^2$ $\frac{1}{2}kx^2$ 也不变.所以在轻质弹簧问题中考虑两端受力与一端受力计算弹性形变和弹性势能是等效的，只不过等效劲度系数不同，但是由于整个弹簧的劲度系数不变，计算弹簧振子周期时仍然用 k，这是轻质弹簧的一个性质.

2、当匀速运动（变速运动也成立，本文不再讨论）的观察者相对于轻质弹簧的固定点在弹力所在直线上的分速度不等于 0 时，根据对称性原理，

$dE_{1p}(t)$ $f_1 d\ (\frac{1}{2}x_1)$ $f_1 dx_1$，与只考虑一端受到的力产生的效果相同. 证毕.

4 区分矢量力学的势能和分析力学中的势能概念

假设一个质点受到的合力为保守力，根据牛顿第二定律可知 $\boldsymbol{f}=m\frac{dv}{dt}$， (1)

两边点乘 $\boldsymbol{dr}$，$f\cdot dr=d\,(\frac{1}{2}mv^2)$ (2)

引入动能和势能的表达式 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$，$dE_p=-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr}$，则式（2）变为 $dE_k+dE_p=0$ (3)

从上面机械能守恒定律的推导可以看出，机械能守恒定律中的保守力是指保守力的合力，因为牛顿第二定律中的力也是考虑了势能就不能再计算保守力的功了，严格讲斜面和单摆问题中的机械能不是重力机械能问题，因为此时质点受到的合力不等于重力，不过在相对于斜面和单摆悬挂点静止的坐标系里计算的结果和重力机械能计算结果相同，因为另外一个保守力不做功[2～3] [13]（因此很多人误认为是重力机械能问题），但是在相对于该坐标系匀速运动的坐标系里这个保守力做功，同时改变了质点的动能和势能，不改变质点的机械能，因此分析力学从能量角度研究完整、理想、双侧束问题，计算机械能时不考虑约束反力，虚功原理在所有的惯性系里都成立.其实

在非惯性系里约束力也不能改变系统的机械能，只能同时改变动能和势能，因此虚功原理在非惯性系也成立.

设约束不可解（即双面约束），某力系在 k 个几何约束下处于平衡状态.对体系中任一质点 P_i，设有主动力合力 $\mathbf{F}_i$ 及约束反力合力 $\mathbf{R}_i$ 作用其上，则因处于平衡状态，故此时必有

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

现让每一质点自它的平衡位置发生一虚位移 $\delta\mathbf{r}_i$，则由上式得

$$\mathbf{F}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

对上式中的各式求和，得

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0$$

若为理想约束，约束反力不改变机械能，即 $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0$，这正是上式左边第二项，故若力系处于平衡状态，则其平衡条件为

虚功原理 ⇨ $$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0}$$

或

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0}$$

反之，也可证明，当上式对任意 $\delta\mathbf{r}_i$ 都成立时，系统在约束所允许的位置必保持平衡.可见此式表明，受有理想约束的力系平衡的充要条件是此力系诸主动力在任意虚位移上所做的元功之和为 0.此即虚功原理，也称虚位移原理，还称为静力学的普遍方程.（虚功原理是力学体系呈平衡状态的一般判据，它是一个关于平衡的原理，是机械能守恒定律的一种表现形式.）.

有些分析力学教材认为光滑约束中的约束反力与实位移垂直，约束反力不做功，这是不完善的，因为约束反力在一个惯性系里不做功，在另一个惯性系里可能做功，完整的表述应该为——光滑约束中的约束反力不改变质点的机械能，这样就适用于所有的惯性系了.斜面和单摆问题在分析力学中可以认为是重力机械能问题.文献[14～16]证明了直线匀加速度参考坐标系和匀角速度定轴转动参考坐标系，其惯性力为保守力，可以证明此时在非惯性系里光滑约束中的约束反力也不改变质点的机械能.

设质点系由 n 个质点组成，应用达朗贝尔原理，第 i 个质点的惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ii} = -m_i\boldsymbol{a}_i$，则作用该质点的主动力 $\boldsymbol{F}_i$、约束力 $\boldsymbol{F}_{Ni}$、惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ii}$ 构成平衡力系.其平衡方程为

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} + \boldsymbol{F}_{Ii} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

质点系受到理想、双侧约束时，依据虚位移原理有 $\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} + \boldsymbol{F}_{Ii}) \bullet \delta\boldsymbol{r}_i = 0$

若质点系受的理想约束，即 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{Ni} \bullet \delta\boldsymbol{r}_i = 0$，

则 $\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ii}) \bullet \delta\boldsymbol{r}_i = 0$

或者 $\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}) \bullet \delta\boldsymbol{r}_i = 0$

称为**动力学普遍方程**，也称为**达朗贝尔—拉格朗日方程**.它表明：**具有完整、理想、双侧束的质点系在运动的任一瞬时，作用在质点系上的主动力和惯性力在任一组虚位移中所作的元功之和为零.**它建立了质点系动力学问题的普遍规律，特别是对于非自由质点系来说，在求解时不必考虑未知的约束力，只需研究主动力，从而大大地简化了计算过程.

在弹簧振子(单摆)问题中，是一个完整、理想、双侧束的质点，约束力不改变质点的机械能；考虑弹簧（摆线）质量，是具有完整、理想、双侧束的质点系，约束力也不改变系统的机械能.

矢量力学的机械能守恒定律中的势能对应于所有的有势力，包括主动力和约束反力，而分析力学中的拉格朗日函数或哈密顿函数中的势能只对应于广义力，广义力只包含主动力，故两种势能不同.分析力学中的哈密顿函数 H 的守恒原理，在非稳定的约束情况下，H T_2 T_0 V 并非机械能，成为广义的能量，只有在稳定的约束情况下，H T V 才是机械能．故矢量力学的机械能守恒定律要求有势能，而哈密顿函数的守恒原理要求 H 不显含 t 且为稳定约束，它们是从不同角度讨论机械能守恒的．分析力学的广义能量守恒比矢量力学的机械能守恒有着更广泛的意义．对于主动力是保守力的力学体系，分析力学注重的物理量是能量，从数学上讲,处理对象从矢量转变为标量，处理方法也从几何方法转变为数学分析的方法.在处理束缚体系时，由于拉格朗日方程中不含约束反力，避免了约束反力引起的麻烦.所以分析力学方法在处理力学体系运动问题时显示出了很大的优越性.牛顿力学方法，面对的物理量是矢量，借助几何图形，解题思路明确、清晰，既可求出运动规律，也能求出约束反力，但对

于多约束的力学体系，此方法会陷入困境.分析力学方法，面对的物理量是标量，采用数学分析的方法，此方法具有更高的概括性和统一性，较牛顿力学方法有一定的优越性.从理论上看，牛顿力学是从物体受力的角度导出其动力学方程的，分析力学则是从能量的角度来导出其动力学方程的.力仅是力学范围内的一个物理量，而能量则是整个物理学的一个基本物理量，这就使拉格朗日方程成为了力学和物理学其他分支相互联系的桥梁，所以分析力学方法具有更高的概括性和统一性，它使得经典力学的理论体系更加严谨，它代表了经典力学的重大发展.

由于矢量力学的机械能守恒定律中的势能对应于所有的有势力，包括主动力和约束反力，约束反力也是保守力，因此矢量力学的机械能守恒定律势能包括约束反力势能，不能仅仅考虑主动力势能.如果约束力可以改变机械能的话，分析力学的方法就是错误的,以往杂志中发表的关于弹簧振子、斜面、单摆等问题中约束反力改变机械能的观点显然是完全错误的.

5 正确理解功的定义

关于功的定义曾经有两种说法——质点的位移与力的标量积、力的作用点的位移与力的标量积，如果考虑到力的作用点必须具有质量，二者是一致的，文献[7]和[39]也认可“功是质点位移与力的标量积”.势能是用质点受到保守力的功定义的，对于没有质量的弹簧根本没有势能而言.现在不少大中学教材甚至高考都提轻质弹簧的弹性势能，这是不严密的，建议教材一定说明，势能属于质点，有人担心势能为何不影响质量，其实动能对于质量的影响在经典力学中也是忽略的.

文献[17]的错误在于搞错了力的作用点，绳子的质量忽略，绳子的拉力应该作用在圆盘上，此时圆盘是一个刚体，不是一个质点.文献[18]的观点是正确的.

功是力与位移的数量积（标量积）W=$f\cdot s$，根据伽利略变换 **s=s$_0$+ut**，因此功不是伽利略变换的不变量，一个力在惯性系 A 不做功，在惯性系 B 可能做功，这应该是一个力学常识. W=$f\cdot(\mathbf{s_0}+\mathbf{u}t)$=$f\cdot\mathbf{s_0}+f\cdot\mathbf{u}t$，$f\cdot\mathbf{u}t$ 也是真实的功.功是一个过程量，但是与观察者有关.在惯性系 B 里的观察者测量的质点位移无法区分也没有必要区分是 **s$_0$** 还是 **u**t.文献[19]认为“约束力在一个惯性系不做功，在另一个惯性系也不做功”是完全错误的，应该是“约束力在所有的惯性系都不改变机械能，但可以同时改变动能和势能.”坐标系是建立在参照系上的，不能说参照系是具体的，坐标系是抽象的，二者是联系在一起的.文献[20]也有类似的错误，例如该文得出一个质点的在地面系的动能为 E_k= $\frac{1}{2}$ m v^2，在小车系的动能为 E'_k $\frac{1}{2}mv^2$ $\frac{1}{2}mu^2$,显然是错误的 例如一个质点在光滑水平面上做匀速圆周运动，在相对于地面匀速运动的小车系看来质点的速率不断变化，动能也是不断变化的，根据动能定理可以得知在地面系约束力不做功，在小车系约束力做功，否则可以得出动能定理不满足力学相对性原理的谬误.文献[21]认为流体的侧压力在静止系不做功，在运动系也不做功，错误与此类似.

6 势能的零点选取问题

根据力学相对性原理（或者说坐标系的观点），在计算势能时势能的零点应该相对于观察者不变，而不是相对于力源不变，例如在一个相对于地面匀速上升的封闭的电梯内，一个观察者看到一个小球从电梯的顶端落下，碰到电梯底部后发生弹性碰撞，如果不考虑空气阻力等因素，理想状况下小球将不断运动下去，观察者看不到外面的情况，不知道小球距离地面的高度以及电梯相对于地面的速度，势能的零点只能相对于自己不变.只要建立了坐标系，势能零点便随之确定.汤川秀树讲：“只用物体、空间和时间这样的概念，还很难准确地描述运动，所以人们进一步引进坐标系，特别是直角坐标系.”

一个坐标系一个势能零点，不存在所谓各个坐标系的公共势能零点，引力势能选在无穷远点计算方便，其他势能零点选在坐标原点计算方便.一般情况下在一个惯性系里选择了势能零点，在另一个惯性系里最好用它的伽利略像点，并不是选择其他点不行，只要相对于观察者不变即可.当一个轻质弹簧竖直悬挂一个质点，质点浸没在水（充分多，忽略质点运动对于其能量的影响）中，在这里质点具有弹性势能、重力势能、浮力势能，在地面系看来总机械能守恒，在相对于地面匀速上升的电梯系看来，机械能也守恒，势能零点只能相对于观察者不变[5]. **文献[22]由于用错了势能零点，才导致了势能显含时间的错误.**

7 正确理解有势力、等时积分的概念

当质点运动时所受力系 F是位置和时间的单值连续函数，我们称这部分空间为力场，且可表为F= F（r，t).若F中不显含t，则称为稳定力场（三维空间里的力场）；F显含t时称为瞬变力场（四维空间里的力场）.

若质点在空间各处所受场力F都相同，则称为均匀力场；反之，F在空间各处都不相同时，则称为非均匀力场.例如万有引力场和弹性力场都是稳定场（三维空间里的力场），在地面附近的重力场F＝mg便是均匀场，而瞬变场的例子在电磁学和量子力

学中是很容易见到的.**注意显含时间的力F= F (r，t)是位置和时间的二元函数，如果t也是位置的函数，如果此时F可以表示为位置的一元函数，不是显含时间的力，只能认为是隐含时间的力.**

当场力 ***F*** ***F*** (***r***，*t*)时，若把时间 *t* 看作参数，而场力 ***F*** 的旋度 $F\times\nabla=0$ (***r*** **0** 除外)得到满足，则势能函数 *V* 存在，且 ***F*** $\nabla\times F$ 成立，即 *V* *V* (***r***，*t*)，***F*** ***F*** (***r***，*t*) $\nabla V(\boldsymbol{r},t)$，我们把这样的力场称为有势场，是无旋场.若场力 F 中显含 t 时，这种有势场是非稳定的；若场力 **F** 中不显含 t 时，这种有势场是稳定的.对于非稳定的有势场而言，等势面只具瞬时意义，而计算场力作功的公式 *W* $\int \mathrm{d}W$ $\int_{p_1}^{p_2}\mathrm{d}V$ V_1 V_2 不再成立，因为积分时不能将参数 *t* 固定，场力的元功为 ***dW*** ∇V d***r*** d*V* $\frac{\partial V}{\partial t}$ *dt*. 这种非稳定的有势场不是保守场，与它相关的势能函数 *V* 表示为位置和时间的二元函数 *V* *V* (***r***，*t*). 一般说来，具有势能函数的无旋场不一定是保守场，它仅是有势场.重力、弹簧弹力和万有引力等都是稳定场（三维空间里的力场），不是显含时间的力场（四维空间里的力场）.在机械能定理中可以有显含时间的力（非保守力），在机械能守恒定律中不能有显含时间的力.

等时积分是一个数学概念，当力场 F（r，t）是时间和空间的多元函数时，在指定时刻 t 和指定路线 L，对力 F 的空间积分叫做等时积分. 只有显含时间的力场（四维空间里的力场）中的等时积分才不等于 0，对于重力场、引力场、弹力场等稳定场（三维空间里的力场）的等时积分都等于 0，因为在稳定场（三维空间里的力场）中质点在任意时刻的位移是唯一的，文献[22]作者得出等时积分不等于 0，这是明显的低级错误.如果按照等时积分计算势能的改变量，自由落体运动中在地面系测量质点的重力势能始终不变，质点的动能不断变化，机械能不守恒，这是极其荒谬的.

文献[22]利用等时积分计算势能的改变量，得出功和势能的改变量具有伽利略变换的不变性，如果按照这个观点在弹簧振子问题中墙壁的作用力的等时积分也始终为 0，不改变弹簧的势能，文献[22]的观点显然是错误的.随体积分计算动能的改变量，不具有伽利略变换的不变性.动能和势能的改变量利用不同的积分计算，显然二者不一致.

8 保守力的认识

现在的力学教材都是利用环路积分为 0 定义保守力的，文献[23～24]指出如果力的保守性可随参照系而变，那么在不同的惯性系中做关于某力的保守性的物理实验，将可根据该力在一惯性系中做功是否与路径有关，从而判断该惯性系相对施加该力的作为另一惯性系的物体是否在运动——这是相对性原理不能允许的.力是伽利略变换的不变量就不成立了，经典力学理论本身就出现了矛盾.

下面证明旋度等于 0，环路积分为 0 和作用力 F 是某位势 Φ 的梯度三者是等价的.

设定 F 为在空间任意位置定义（或空间内单连通的区域）的矢量场，假若它满足以下三个等价的条件中任意一个条件，则可称此矢量场为保守矢量场：

①F 的旋度是零：$F\times\nabla=0$；

②假设粒子从某闭合路径 C 的某一位置，经过这闭合路径 C，又回到原先位置，则力矢量 F 所做的机械功 W 等于零：$W=\int_C F\bullet dr=0$；

③作用力 F 是某位势 Φ 的梯度：$F=-\nabla\Phi$.

①□②：设定 C 为任意简单闭合路径，即初始位置与终结位置相同、不自交的路径.思考边界为 C 的任意曲面 S. 斯托克斯定理表明 $\int_S(\nabla\times F)\bullet da=\int_C F\bullet dr$.假设 F 的旋度等于零，方程左边为零，则机械功 W 是零，第二个条件是正确的.

②□③：假设对于任意简单闭合路径 C，F 所做的随体功 W 是零，则保守力所做于粒子的随体功，独立于路径的选择. 设定函数 $\Phi(x)=-\int_o^x F\bullet dr$，其中 x 和 o 分别是特定的初始位置和空间内任意位置. 根据微积分基本定理，$F(X)=-\nabla\Phi(x)$.所以第三个条件是正确的.

③□①：假设第三个条件是正确的.思考下述方程：

$$\nabla\times F=-\nabla\times\nabla\Phi$$
$$=-(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y})\hat{x}-(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z})\hat{y}-(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x})\hat{z}$$
$$=0$$

所以第一个条件是正确的.因此这三个条件彼此等价.由于符合第二个条件就等于通过保守力的闭合路径要求，所以只要满足上述三个条件的任何一条件，施加于粒子的作用力就是保守力.如果作用在物体的力所做之功仅与力作用点的起始位置和终了位置有关，而与其作用点经过的路径无关（注意这里的路径必须具有任意性，否则不一定是保守力[86].），即不仅力有势，且在相应的势能表达式中不显含时间，该力则为保守力.势能定义式为

$dE_p=-f\cdot dr$，环路积分必等于 0.当势能不显含时间时，也可以称为位能，势能是位置的函数，教材中可以将势能和位能区别开来，位能作为势能的一种情形.由于我们研究问题中势能一般不显含时间，也可以不加区分，本文没有区分，默认势能不显含时间.

由于旋度具有伽利略变换的不变性，因此力的保守性也具有伽利略变换的不变性.

下面再给出一种证明方法——

F（r）=F_1（R-ut），由于 R=***r*+*u**t*=***r* (*t*)+*u**t*=**φ(t)** 是关于时间 t 的连续函数，质点在任何时刻的速度都是唯一存在的，因此 R=**φ(t)**是可导函数，如果该函数出现常值函数区间，质点静止，受到的力是 0，不是显含时间的力，下面不研究这个区间，去掉该常值函数区间，该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间，设 D 是该函数的任意一个单调区间，根据反函数的定义在该区间上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(R)$，所以 F（r）=F_1（R -ut）= F_1（R -u$\varphi^{-1}(R)$= F_2（R），仍然是位置的一元函数，对时间的偏导数等于 0，不是显含时间的力.有些文献[25]仅仅从 ***F*=*f***（r）=F_1（R-ut）出发得出显含时间的力，其实经过数学变换可以消去时间 t，力经过伽利略变换后仍然可以表示为位置的函数.

不要认为在力的解析式中有时间变量就认为一定是显含时间的力场，必须分析一下能否消去变量 t，表示为位置的一元函数，例如当把弹簧振子固定在地面上时，在地面系观察弹力 $F=-kx=-\frac{1}{2}kx-\frac{1}{2}kA\sin(\omega t+\varphi)$，但不是显含时间的力场，否则地面系机械能也不守恒. 机械能守恒定律是时间均匀性的体现，显含时间的力场能量不守恒.$E_p\ \frac{1}{2}kx^2$ 仅仅适用于弹簧振子中质点的弹性势能，而且不适用于所有的惯性系[44]，不适用于弹簧的弹性势能.

场的性质是它本身的属性，和坐标系的引进没有关系.引入坐标系是便于运用数学研究它的性质.经典力学中显含时间的力在各惯性系都是显含时间的力，机械能在各惯性系都不守恒，不是保守力经过伽利略变换得出.伽利略变换是一种观测效应，它的实质通俗解释就是一个质点在绝对空间里运动，两个惯性系里的观察者测量其速度和位移，然后利用矢量力学规律描述其运动，场的坐标不变，在伽利略、牛顿时代还没有场的概念，认为是超距、瞬时作用，直到法拉第、麦克斯韦时代才提出场的概念.保守力是有势力的一种，力是伽利略变换的不变量，包括力场的性质不变，在一个惯性系中某个力不显含时间，在另外的惯性系中也一定不显含时间，例如在自由落体问题中匀速上升的电梯系中我们不能计算势能时重力是显含时间的力，利用动能定理求动能时重力不是显含时间的力，前后不自洽.用对称性原理表述为，由势能对时间平移的不变性，就必有能量的守恒性（例如重力随时间的可变性，在重力较弱时把水提升到蓄水池中去，所做的功较少；在重力变强时把蓄水池中的水泄放出来，利用水力发电，释放出较多的能量.这是典型的第一类永动机）.

大学力学里的保守力一般只提重力、弹簧弹力和万有引力，其实有些其他的力也是保守力，例如斜面的支持力[13]、摆线的拉力、匀速圆周运动的约束反力、静摩擦力、理想流体的压力[26].例如假设静摩擦力是耗散力，这个静摩擦力在一个惯性系里不做功，在另一个惯性系里可以做功，这样就可以产生热能，显然是错误的.**流体力学中推导伯努利方程时曾经利用了理想流体的压力是保守力，**因此理想流体的压力能也可以称为压力势能.其实管壁的侧压力也是一个保守力.）、弹性碰撞中的弹力、某些惯性力以及浮力等，文献[5]列举了关于浮力势能的文章很多，本文不再论述.斜面的支持力是一个保守力，例如把斜面固定在地面上，在地面系看来小滑块在斜面上无论如何运动，当小滑块回到原点时支持力的功都等于 0，所以支持力是保守力，又由于力是伽利略变换的不变量，因此在小车系看来支持力也是一个保守力.只要是保守力就可以引入势能，但是注意是小滑块的支持力势能，不是斜面的支持力势能，因为斜面没有形变.又因为重力也是一个保守力，因此它们的合力也是一个保守力.由于力是一个伽利略变换的不变量，因此在小车系看来小滑块受到的合力也是一个保守力.文献[13]验证了约束反力是一个保守力.**力学中的力可以分为三种：保守力、耗散力和显含时间的力.**

例 1 在一个相对于地面匀速上升的电梯底部静止放置一个物体（视为质点），在电梯内的观察者看来，没有任何力对质点做功，动能和势能（取电梯的底部为势能零点）均为 0，机械能守恒；在地面的观察者看来，电梯底部对于质点的支持力做功，动能不变，势能不断增加（取地面为势能零点），机械能不守恒.其实这种分析是错误的，在地面系看来电梯的支持力也是一个保守力（很容易证明当电梯上升和下降相同的高度时，支持力做功之和为 0，满足保守力定义.），重力势能增加量等于支持力势能减少量，质点受到的合力为 0，总势能不变，动能也不变，因而机械能守恒，机械能守恒定律满足伽利略变换.重力机械能不守恒，不代表机械能（力学能）不守恒.类似地考察这样一个理想试验，一个质点静止在水平地面上，在地面上的观察者看来，质点的动能和势能都不变，机械能守恒；在相对于

地面匀速运动的电梯里的观察者看来，质点的动能不变，支持力和重力同时做功，两个力做功之和为0，重力势能的减少量等于支持力势能的增加量，因此势能也不会发生变化，机械能也守恒，满足力学相对性原理.如果把支持力当做外力，在电梯系支持力做功，机械能增加，能量来自哪里？这样就不满足力学相对性原理了.

例 2 地面上有两堵相互平行的刚性墙沿南北方向，其间有一刚性小球沿东西方向因与墙的碰撞来回运动.地面上小球的机械能守恒，但在沿东西方向匀速运动的小车上看，小球机械能不守恒.

错误分析：在小车上看，小球的速度等于地面的速度（-V）加小球相对于地面的速度（一会儿是W 与墙碰后是-w）.所以在小车上看，小球的速度是—V+W，或-V-W.显然小球动能在跳跃式来回变化，机械能不守恒.

正确解答：在这里由于是弹性碰撞，弹力做功没有产生热能，也应该视为保守力.在地面系看来是弹性碰撞，应该理解为小球在压缩过程和还原过程中位移大小相等，平均力的大小不变，因此动能不变.在压缩过程中动能转化为势能，在还原过程中势能转化为动能. **如果在地面系选择起始时刻势能为 0 的话，在地面系看来除非碰撞过程外，势能始终为 0.**

在小车系看来，小球在压缩过程和还原过程中位移大小不再相等，平均力的大小不变，因此增加的势能转化为动能，或者减少的动能转化为势能.如果在小车系也选择起始时刻的势能为 0 的话，在非碰撞过程中势能也可以不等于 0.由于动能定理具有伽利略变换的不变性，在小车系根据动能定理可以得到在碰撞过程中，弹力做功不等于 0，因此由势能的定义可以得出势能的改变也不等于 0.从上面的分析可以看出弹性碰撞不能视为完全不能形变的质点，否则会造成矛盾. 东西墙各安装一弹簧令小球在两弹簧间运动.假定系统没有非保守力作用，机械能守恒定律在各惯性系都成立.

保守力也具有相对性，例如静电学中库仑力是保守力，但是由于它对应的能量不是力学能，不能视为力学中的保守力.如果研究能量守恒定律，那么所有力都是保守力，能量既不能消失也不能产生.文献[27]也说明了约束力是一个保守力的问题.

9 惯性系与惯性力

1955 年 4 月 3 日（爱因斯坦于两个星期后的 4 月 18 日逝世），美国著名的科学史家 I.B.科恩，对爱因斯坦进行了一次采访，据科恩报道：“爱因斯坦说他永远钦佩牛顿……‘牛顿所写过的每样东西都活在后来的物理科学著作中’……爱因斯坦说，回顾牛顿的全部思想，他认为牛顿的最伟大成就是他认识到特选参考系（privileged systems）的作用.他十分强调地把这句话重复了几遍. 我觉得这是有点令人困惑的，因为今天我们都相信，并没有什么特选系，而只有惯性系……由于爱因斯坦自己的工作，我们不再（像牛顿那样）相信绝对空间和绝对时间概念，也不再相信有一个对于绝对空间是静止的或者是运动的特选系.”[83]科恩的这些困惑，当然很容易被我们理解——“狭义相对论的整个理论都建立在惯性系的基础上”，[82] 大家普遍相信，没有什么特选参考系，而只有惯性系；惯性力是指:当物体有加速度时，物体具有的惯性会使物体有保持原有运动状态的倾向，而此时若以该物体为参考系，并在该参考系上建立坐标系，看起来有一个方向相反的力作用在该物体上令该物体在坐标系内发生位移，因此称之为惯性力.因为在经典力学里惯性力实际上并不存在，实际存在的只有原本将该物体加速的力，因此惯性力又称为假想力.从定性的角度而言，牛顿第一定律定义了惯性系与非惯性系；从定量的角度来说，从牛顿第二定律的定量定量表达式中引入了惯性力，以此平衡在非惯性系中看到的惯性力，使牛顿第一定律和第二定律在惯性系和非惯性系都成立；对于牛顿第三定律，描述的是相互作用之间的关系，不需要考虑不是相互的非惯性力，因此牛顿第三定律与参照系的选取无关（由于动量守恒定律可以从牛顿第三定律推导出来，因此动量守恒定律与参照系的选取无关.）.

爱因斯坦认为:“惯性原理的弱点在于它会有这样一种循环论证：如果一个物体离开别的物体都足够远，那么它运动起来没有加速度；而只有由于它没有加速度这一事实，我们才知道它离开别的物体是足够远”[71].惯性系是指牛顿定律成立的坐标系，在地面上做力学实验我们一般默认地面系是惯性系，那么相对于地面匀速运动的小车系或者说电梯系都是惯性系，惯性系里测量不到惯性力，在这样的坐标系里利用惯性力解释问题都是错误的.根据等效原理地球所受的太阳等星体的引力不用考虑.我们在把地面系当做是惯性系的同时，已经默认了地球的质量充分大，忽略其能量的变化，因此研究机械能守恒定律与力学相对性原理关系时两个惯性系都不应该考虑地球能量的变化.我们不能研究伽利略变换时，地面系和电梯系都是惯性系，考虑能量变化时都是非惯性系，前后必须做到自洽.现在世界上所有的仪器还达不到考虑由于地球的质量不是充分大导致的系统误差，仅仅太阳的阳光对于地球的能量影响也比实验中的质点对于地球的能量的影响大得多，我们不能说为了一个实验让太阳不发光.质点的运动对于地球动能的影响远远小于地震、海啸、山川、河流、地铁以及汽车的运行等地面因素，也远远小于太阳的电磁辐射、太阳宇宙线、太阳风、行星际磁场、银河宇宙线、微流星体等地外因素的

影响.如果考虑这些因素，所有的力学教材都需要修改，问题就复杂了.由于我们不知道地球的具体质量，其实地球的质量是一个变量，宇宙中的星体尤其是太阳不断向地球辐射粒子，地球也向外辐射粒子，还有陨石等因素，这样将导致不可知论.

满足力学相对性原理即动力学规律满足伽利略变换，不研究非惯性系之间的变换规律，自由落体运动(其他类似)按照两体问题处理由于此时地面系和电梯系不是惯性系，与问题讨论无关. 伽里略变换只研究惯性系，不研究近似惯性系，实验中是近似惯性系(可能有多方面因素的干扰)，理论计算中是严格惯性系.

在自由落体问题的研究中，不能仅仅把重力看作地球对于质点的万有引力在低空的近似，重力是万有引力与地球自转产生的惯性力的合力（分析这个问题的文献很多，读者可以自己搜索.），研究机械能守恒定律与力学相对性原理的关系时，可以把重力和万有引力看作没有关系的两个力.万有引力可以地月系统或者卫星围绕地球运动（忽略空气阻力等非保守力因素）为例进行研究.在自由落体问题中若按照两体问题计算，地面系近似守恒，近似守恒不等于守恒，也是不守恒，因为质点除了受到重力外，还受到一个惯性力$-m^2g/M$，尽管比较小，此时地面系只能是近似守恒（由于是理论推导，在这里不能取近似值；如果取近似值在电梯系也取近似值，惯性力对地球所作功率是 mgV_0，此时惯性力的功 mgV_0t 尽管比上面要大很多，但是相对于此时地球的动能而言依然是非常小的，显然也可以忽略（近似计算是按照忽略量在总值中的比例，不是按照忽略量的绝对值），不能袒护一方，此时机械能也守恒，守恒值为地球的动能，因为质点的动能和势能相对于地球的动能而言极小.地面系与电梯系都不守恒，与力学相对性原理没有关系，不能说明机械能守恒定律不满足力学相对性原理.弹簧振子问题类似，不再说明.相对于匀速运动的电梯视为惯性系，此时必须考虑电梯系内质点受到的重力；相对于地面自由降落的电梯视为惯性系，此时不能考虑电梯系质点受到的重力，相对于地面的加速运动相当于抵消了重力.类似地，地球围绕太阳运动，如果考虑太阳的引力，地面系就不是惯性系，忽略太阳的引力地面系才是惯性系.两体问题的研究以系统的质心为参照系，也是由于两个质点对于质心的合力为 0 的缘故.如果外界对一个系统的加速度的相等，在研究某个问题中，只要该问题所涉及的力对参考点的合外力为 0，该参考点即为严格的惯性系.通常情况下，重力、摩擦力等对于地球的影响甚小，可视为足够好的惯性系或者说是近似惯性系.北大赵凯华教授指出:“只要我们所讨论的问题不是像大气或海洋环流那类牵涉空间范围较大、时间间隔较长的过程，固定在地面上的参考系可看做近似程度相当好的惯性系.”[81]

对于普通的力学实验，把地面系作为惯性系，具有足够好的精确度，忽略质点运动的影响，把地球的质量视为充分大，否则不具有可操作性，事实上仅仅由于地球质量的变化对于地球运动的影响就远远大于质点运动对于地球运动的影响.在研究质点的运动过程中，可以同时忽略一个力和它产生的加速度，也可以同时增加一个力和相应的加速度，这就是惯性力的来源，这样对于牛顿第一定律的认识就更加深刻了.

10 正确理解功能原理

现行的很多力学教科书的功能原理，$W_{外力}\quad W_{非保守内力}\quad (E_k\quad E_p)\quad (E_{k0}\quad E_{p0})$ (6)

由于式(6)没有引入外势能，将机械能守恒定律成立的条件 $W_{非保守力}\equiv 0$（系统不受任何非保守力的作用），搞错为 $W_{外力}\quad W_{非保守内力}\equiv 0$（外力和非保守内力都不做功）. 正确的功能原理应为 $W_{非保守力}\quad (E_{\mathrm{k}}\quad E_{\mathrm{p}})\quad (E_{\mathrm{k0}}\quad E_{\mathrm{p0}})$（非保守力的功等于机械能的改变量） (7)

式（6）和式（7）的区别只在于引入外势能，即把所有保守力的功都移到等号右边，等号左边只剩下非保守力的功[28].式（7）给出的机械能守恒定律成立的条件为$W_{非保守力}\equiv 0$.考虑到非保守力在一个惯性系不做功，在另一个惯性系可能做功（例如一个可以视为质点的物体在两堵粗糙的墙之间匀速**u**下滑，滑动摩擦力恰好等于重力，在地面系看来机械能不守恒，但是如果从一个相对于地面匀速**u**降落的电梯系看来，滑动摩擦力不做功，重力也不做功，机械能守恒.），因此机械能守恒定律成立的条件为$\boldsymbol{F}_{非保守力}=\boldsymbol{0}$，这样机械能守恒定律就满足伽利略变换了，用文字叙述为——如果质点仅仅受到保守力的作用，那么质点的机械能守恒.因此建议把式（6）从力学教科书中删除，用式（7）代替它的位置（值得一提的是漆安慎的力学从2005年以后的版本就已经这样做了），并改称式（7）为机械能定理，因式（7）确实是定理而非原理.注意非保守力包括耗散力和显含时间的力[29]梁昆淼老先生20世纪80年代在四川师范大学曾经指出滑动摩擦力做功与参照系存在不协调之处.从对称性角度看，保守力具有时间反演的不变性，非保守力不具有时间反演的不变性，能量守恒定律的普遍性在于它与时间的均匀性相关联.

“势能属于系统”理论上没有错误，尤其是内势能问题（例如地月系统的引力势能），但是当相互作用的两个物体质量相差极大——例如力学实验室中研究在自由落体问题，经过计算可知质点的运动对于地球能量的变化微乎其微，系统相对误差在10^{-25}至10^{-26}范围内，不仅远远小于空气阻力的影响，

也小于重力加速度变化产生的误差，甚至小于狭义相对论效应，完全可以忽略，我们在地面系计算重力势能时忽略了地球能量的变化，在电梯系也必须忽略-----量变引起了质变.“重力势能属于地球和物体”理论上没有错误，但是没有实际意义.现行力学教材中说：“重力势能属于物体是一种通俗的说法”表述错误，应该是一种精确度极高的表述.此时地面系和相对于地面匀速运动的坐标系都按照惯性系对待，地球质量视为充分大，外势能只研究质点就可以，例如研究自由落体运动，在电梯系不用管地球.文献[22]由于没有正确理解外势能，利用外场计算的势能依然是内势能，外势能不用考虑力源.

50多年来，力学教学界围绕着关于外势能的机械能守恒定律是否满足力学相对性原理（或者说伽利略变换）存在一些争论和分歧，出现了机械能守恒定律不满足力学相对性原理、机械能守恒定律满足力学相对性原理但是不具有单独的协变性以及机械能守恒定律满足力学相对性原理也具有单独的协变性三种截然不同的结论.为了协调机械能守恒定律和力学相对性原理之间的关系，人们开始怀疑引入外势能概念的必要性，结果不但使功能原理和机械能守恒定律出现了两种表述，还涉及到经典力学系统的内在协调性问题.

11 内势能与外势能的关系

现在不少人对于势能理解为：势能是储存于一个系统内的能量，也可以释放或者转化为其他形式的能量.势能是状态量，又称作位能.势能不是属于单独物体所具有的，而是相互作用的物体所共有.这种观点对于内势能是正确的，对于外势能不成立.参照系的匀速运动同时改变两个质点的势能，但是它们的总势能没有变化.

笔者建议力学教材明确写明，不要让读者误解.其实现在所有力学教材势能的最初定义都是外势能，在推导重力、万有引力、弹力是保守力时也是按照一个质点受到的力推导，没有考虑两个质点，在自由落体运动、单摆、斜面、引力场、弹簧振子等问题推导机械能守恒都是利用外势能计算，仍然有不少人排斥外势能的存在，例如文献[30～33].

关于内势能的机械能守恒定律满足力学相对性原理力学界是取得共识的[10][34]，文献[120]利用内势能计算斜面问题得出机械能守恒定律具有伽利略变换的不变性.外势能的机械能守恒定律也满足力学相对性原理[35]，不过此时势能与观察者有关[36]，动能也与观察者有关，对于不同惯性系中的观察者机械能（力学能）都是守恒的，只不过守恒量不相同.在研究机械能守恒定律与力学相对性原理之间的关系一定注意要么都按照内势能计算，要么都按照外势能计算，惯性系选取时前者必须以系统的质心为参照系，后者以质量相对极大的物体为参照系，一定做到自洽.至于在实际问题中选择内势能还是外势能计算，根据研究问题精度的要求进行，二者有着明显的区别，量变引起质变.

	保守力的功和势能的关系	势能所有者	势能函数关系	坐标系变换与势能的关系	适用范围	惯性系的选取	二者之间的关系
内势能（内场处理）	一对保守力的功等于势能的减少，需要两个位形坐标表示.	势能属于系统即两个质点.	势能是相对位置的函数.	势能是伽利略变换的不变量.势能的数值与势能零点的选择无关	适用于所有情形.	以系统的质心为参照系.	内势能可以看作两个质点的外势能，也可以折合质量代替一个质点的质量转化为外势能.在静止系，外势能是内势能的极限情况.
外势能（外场处理）	一个保守力的功等于势能的减少，只需一个位形坐标表示（忽略另一个保守力的功）.	势能属于一个质点.	势能是坐标的函数，计算外势能不用考虑力源.	势能不是伽利略变换的不变量，$E'_p= E_p \quad \mathbf{mv}\cdot\mathbf{u}$[36～38].势能的数值与势能零点的选择有关.	适用于质量相差悬殊的质点，例如重力势能.把质量较大的物体质量按照无穷大计算.	以大质量物体为参照系.	

当相互作用的两个物体质量相差极大时，要么按照内势能研究，要么按照外势能研究，前后必须自洽.按照内势能研究时，必须以系统的质心或者相对于质心匀速运动的物体为参照系，例如在自由落体运动的研究中，以地面系为参照系为外势能，此时实际上把地球质量视为充分大；以相对于地面匀速运动的电梯考察时也应该按照外势能计算，不能认为此时地球受到惯性力，在惯性系里测量不到惯性力，否则会得出机械能守恒定律不满足伽利略变换的错误结论[40].

速度是相对的，所以动能也是相对的.机械能也是相对的，两坐标系“守恒量”不相等，$E'=E+\frac{1}{2}mu^2$.文献[41]指出系统的机械能可以表示为本质不同的两项之和：依赖于速度的动能和仅仅依赖于质点坐标的势能.

下面以弹簧振子为例再说明一下在静止系外势能是内势能的极限情况——

例 3

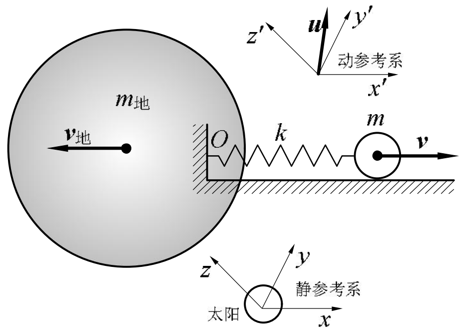


图 1

假设弹簧振子固定在地面上，如果把地球考虑进来，静止惯性参考系就只能选择地球之外的更高级别的惯性系，比如太阳参考系，总之静止惯性参考系是理想的，速度和加速度都是 0.就讨论振子机械能的目的而言，其它天体的作用和地球的自转都要忽略掉(或者相互抵消)，地球也被当成一个均匀球形刚体，或者更进一步简化为质点，地球和小球之间只有弹簧力的作用，如图 1 所示.记小球和地球的质量分别为 $m和m_地$，各自相对静止惯性参考系的速度分别为 $\boldsymbol{v}和\boldsymbol{v}_地$，弹簧的势能为 E_p，则有

$$\frac{1}{2}m_地 v_地^2+\frac{1}{2}mv^2+E_\mathrm{p}=E_0 \tag{8}$$

式中 E_0 为系统能量常量.假定还有一个以恒定速度 $\boldsymbol{u}$ 运动的参考系 $x'y'z'$，在这个动参考系中观察到的小球和地球速度分别为 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}和\boldsymbol{v}'_地=\boldsymbol{v}_地-\boldsymbol{u}$，相应的机械能 E' 为(弹簧势能仍然不变)

$$E'=\frac{1}{2}m_地 v'^2_地+\frac{1}{2}mv'^2+E_\mathrm{p} \tag{9}$$

将 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}和\boldsymbol{v}'_地=\boldsymbol{v}_地-\boldsymbol{u}$ 代入有

$$\begin{aligned}E'&=\frac{1}{2}m_地(\boldsymbol{v}_地-\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{v}_地-\boldsymbol{u})+\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+E_\mathrm{p}\\&=\frac{1}{2}m_地(v_地^2-2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_地+u^2)+\frac{1}{2}m(v^2-2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+u^2)+E_\mathrm{p}\end{aligned}$$

进一步整理可得

$$E'=\left(\frac{1}{2}m_地 v_地^2+\frac{1}{2}mv^2+E_\mathrm{p}\right)+\left(\frac{1}{2}m_地 u^2+\frac{1}{2}mu^2\right)-\boldsymbol{u}\cdot\left(m_地\boldsymbol{v}_地+m\boldsymbol{v}\right) \tag{10}$$

式(10)等号左端第一个圆括号内为静止系中看到的系统机械能 E_0，第二个圆括号内也是常量.第三个圆括号内为静止系中观察到的系统动量 $\boldsymbol{p}=m_地\boldsymbol{v}_地+m\boldsymbol{v}$.前面已经声明，其他外力忽略不计，所以动量 $\boldsymbol{p}$ 也不随时间变化.

综上，在相对于理想静止惯性参考系作匀速动参考系中，观察到的机械能也守恒.

此时的 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_地,\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_地$，把它们代入式(9)有

$$E'=\frac{1}{2}mv'^2+E_\mathrm{p} \tag{11}$$

为了便于对式(11)讨论，我们应该把它换成为 E_0，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 的表达式.由 $\boldsymbol{p}=m_地\boldsymbol{v}_地+m\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_地$ 可解出

$$\boldsymbol{v}_地=\frac{\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{v}'}{m_地+m},\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}+m_地\boldsymbol{v}'}{m_地+m} \tag{12}$$

代入式(8)可得

$$E_{\rm p}=E_0-\frac{1}{2}m_{地}\left|\frac{\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{v}'}{m_{地}+m}\right|^2-\frac{1}{2}m\left|\frac{\boldsymbol{p}+m_{地}\boldsymbol{v}'}{m_{地}+m}\right|^2 \quad (13)$$

再代入式(11)有

$$E'=E_0-\frac{1}{2}\frac{p^2}{m_{地}+m}+\frac{m}{m_{地}+m}\left(\frac{1}{2}mv'^2\right) \quad (14)$$

式(14)等号右边前两项为常量，第三项则会随时间变化，所以在地面上观察到的机械能不守恒.其本质是固定于地球表面参考系不是惯性参考系(因为弹簧的反作用)，但所幸的是地球质量远远大于被观察物体的质量，从而不守恒量很小.如 1000kg 的物体以相对于地面 1000m/s 的速度运动(接近 3 倍音速)，第三项也只有 8.365×10^{-17} J (地球质量按 5.977×10^{24} kg 计算).当把地球质量视为无穷大时，式(14)退化为 $E'=E_0$，机械能显然守恒，所以外势能是内势能的极限情况.其实现在国内外所有的力学教材最初都是以外势能引入的，只不过后来增加了一个势能属于系统、势能是相对位置的函数、一对保守力的功等于势能的减少量等内势能的属性，这样人们就误认为外势能也具有这些属性.在文献[42～43]中作者在地面系按照外势能计算，在电梯系（或者小车系）按照内势能计算，导致了机械能守恒定律不满足力学相对性原理的错误，前后不自洽.由于外力做功不具有伽利略变换的不变性，因此外势能不具有伽利略变换的不变性，这也是量变引起质变的结果，在经典力学中由于没有明确指出这个问题.

12 势能定义与势能公式

势能定义：势能是质点位置（或者说坐标）的函数，保守力的功等于质点势能的减少.纵观 50 多年来关于机械能守恒定律与力学相对性原理关系的讨论可以发现，在弹力、重力和引力机械能问题根据势能定义求解的是满足力学相对性原理，根据经典势能公式求解的不满足力学相对性原理.由于势能本质是用保守力的功定义的，而保守力的元功是坐标函数的全微分、可积分的，积分值为末态始态之差与积分路径无关，因此外势能也具有相对性.在经典力学教材中我们一般都是根据势能定义推导势能公式的，因此势能定义比公式更基本，以弹性势能为例(重力势能和引力势能也存在类似问题，本文不再说明)，$E_{\rm p}$ (t) $\frac{1}{2}kx^2$ $m\omega uA\sin(\omega t)$= $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ $m\omega uA\sin(\omega t)$= $\frac{1}{2}kx^2$+ $m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$ [44]应该是弹簧振子中弹性势能的一般公式，没有否定经典的弹性势能公式，原来的公式只是一个特例——观察者在弹簧弹力方向上分速度为 **0**，不能认为弹性势能对于所有的观察者都相同，需要根据“物体的势能增加量等于物体克服保守力做的功”重新计算(万有引力引力势能 $E_{\rm p}$ $\frac{mGM}{r}$ $m\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{u}$ [45]，重力势能类似 $E_{\rm p}$ mgh $m\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{u}$）.

对于外势能而言，$E_{\rm p}$ $\frac{1}{2}kx^2$，$E_{\rm p}$ $\frac{mGM}{r}$ 和 $E_{\rm p}$ mgh 仅仅适用于观察者在保守力方向上的分速度始终为 0 时的情形，当观察者在力的方向上分速度不相等时，计算保守力做的功不相等，因此势能差也应该不相等，这说明势能一样具有相对性.现在不少的力学教材没有指明这一点，认为势能差是绝对的，与观察者无关[11].

在相对于保守力源速度为匀速 u 的参照系中看，在保守力源系以速度 v 做曲线运动的质点的势能公式为：$E_{\rm p}(t)$ $e_{\rm p}(t)$ mu v mu v_0. 在相对于外部力源速度为匀速 u 的参照系中看，在外部力源系以速度 v 做曲线运动的质点的动能公式为：$E_{\rm k}$ (t) $e_{\rm k}(t)$ mu v $\frac{1}{2}mu^2$.

在相对于保守力源速度为匀速 u 的参照系中看，在保守力源系以速度 v 做曲线运动的质点的机械能为：

E (t) $E_{\rm k}$ (t) $E_{\rm p}$ (t) $e_{\rm k}$ (t) mu v $\frac{1}{2}mu^2$ $e_{\rm p}$ (t) mu v mu v_0 e (t) $\frac{1}{2}mu^2$ mu v_0. 即

$E(t)$ $e(t)$ $\frac{1}{2}mu^2$ mu v_0.

在保守力源系和相对于该系速度为匀速 u 的参照系中看，在保守力源系以速度 $\boldsymbol{v}$ 做曲线运动的质点的势能定义分别为：$dw=-de_{\rm p}$；$e_{\rm p}(t)-e_{\rm p}(0)=-w$. $dW=-dE_{\rm p}$；$E_{\rm p}(t)-E_{\rm p}(0)=-W$.

在外部力源系和相对于该系速度为匀速 u 的参照系中看，在外部力源系以速度 $\boldsymbol{v}$ 做曲线运动的质点的动能定理分别为：$dw=de_{\rm k}$；$e_{\rm k}(t)-e_{\rm k}(0)=w$. $dW=dE_{\rm k}$；$E_{\rm k}(t)-E_{\rm k}(0)=W$.

在保守力源系和相对于该系速度为匀速 u 的参

照系中看，在保守力源系以速度 *v* 做曲线运动的质点动、势能的关系式分别为：

$de_k=-de_p$；$e_k(t)-e_k(0)=e_p(0)-e_p(t)$．$dE_k=-dE_p$；$E_k(t)-E_k(0)=E_p(0)-E_p(t)$．

经典的势能公式对于内势能成立——内势能具有伽利略变换的不变性.不少人认为经典的势能公式适用于所有的惯性系，在功能原理中排斥外势能的存在，认为都是内势能，但此时需要牺牲一些经典的结论，例如研究自由落体运动地面系就不是惯性系了，机械能也不守恒，而且不具有可操作性，譬如我们根本不知道地球的具体质量等，其他实例也存在这个问题.

13 注意区分力学相对性原理和狭义相对论性原理

按照一般理解，相对性原理对物理方程所提出的要求(或所加的限制)就是协变性要求(限制).力学相对性原理要求力学定律对于伽利略变换是协变的，即经伽利略变换形式不变.狭义相对性原理要求物理定律对于洛伦兹变换是协变的，即经洛伦兹变换形式不变，因此可以说相对性原理就是协变性要求，若某定律服从相对性原理就说它满足协变性要求.要区分的不是相对性原理和协变性，而是伽利略协变性和洛伦兹协变性，即不能把力学相对性原理和狭义相对性原理混为一谈.机械能守恒定律满足伽利略协变性不满足洛伦兹协变性，或者说它满足力学相对性原理不满足狭义相对性原理.从历史上看，把相对性原理简称为协变性要求是从狭义相对论开始的.后来人们干脆把相对性原理称为协变性原理[46].在参考系变换下方程形式不变的性质称为协变性，力学相对性原理要求一切惯性参考系都是等价的，在不同的惯性系中，物理规律应该表示为相同的形式.如果表示物理规律的方程是协变的话，它就满足相对性原理的要求.有些人认为物理方程满足相对性原理，但是可以不具有单独的协变性，是完全错误的[47~49].

由于牛顿运动定律具有伽利略变换的协变性，从一个惯性参照系转换到另一个惯性参照系，牛顿运动定律的形式保持不变.以牛顿运动定律为基础，加上其他条件，可以建立矢量力学的全部理论体系.在不同的惯性参照系中所加上的其他条件，我们可以使之相类似；于是矢量力学的全部理论体系，在所有的惯性参照系都是相同的，这便是矢量力学中的伽利略相对性原理.伽利略相对性原理与狭义相对论的相对性原理二者相同之处在于都认为，对于力学规律一切惯性系都是等价的．即无法用力学实验证明一个惯性系是静止的还是做匀速直线运动．所不同之处在于伽利略相对性原理仅限于力学规律，而狭义相对论的相对性原理则指出，对于所有的物理规律（不仅仅力学），一切惯性系都是等价的．

赵凯华的书中写到：用现代的术语来概括，伽利略相对性原理可表示为：

一个对于惯性系做匀速直线运动的其他参照系，其内部发生的一切物理过程，都不受到系统作为整体的匀速直线运动的影响．或者说，不可能在惯性系内部进行任何物理实验来确定该系统做匀速直线运动的速度．

爱因斯坦要求“相对时空”里的“相对性原理”是无特殊参考系的，所以“洛伦兹变换”无特殊参考系.而“绝对时空”里同样有“运动规律在所有参考系里都有相同的形式”、“物理规律的公式形式与坐标系无关”的规律，所以“绝对时空”里同样有“（伽利略）相对性原理”，无特殊参考系的“伽利略变换”是其数学形式. 爱因斯坦讲：“物理书都充满了复杂的数学公式，可是思想及理念，而非公式，才是每一物理理论的开端.”在相对论体系中，参考系的概念有了质的变化，我们失去了那个永恒不变的背景.在经典的观念下，描述一个物理量需要建立它在所在时空的因果关系，而建立这样的关系需要参考系参数的描述.但是现在，建立一个全空间恒定的参考系已不再可能.在“场”的概念下，物理客体的分布和它们的演化过程改变着局部的和整体的时空结构，时空不能再作为一个不变的、不受物理过程影响的形而上的背景存在，我们需要建立跟随整个时空变化的局部的参考系.这个局部建立的参考系随着物理过程的变化也在不断地变化，而物理过程的变化则被这种局部参考系的变化所反映.所以局部的物理性质的问题就转化成为在时空整体上描述局部参考系的几何度规问题.

“绝对时空”里的力学、电磁学等一切公式形式只有满足“伽利略变换”才能在“绝对时空”里自洽，这从另一方面证明“伽利略变换”就是“绝对时空”里无特殊参考系的“（伽利略）相对性原理”的数学形式.因此，“绝对时空”与“相对时空”里都有各自对应的“相对性原理”，它们都是各自时空里的“运动规律在所有参考系里都有相同的形式”、“物理规律的公式形式与坐标系无关”理论，只是各自对应的数学形式不一样；所以两个时空有本质的区别.

力学相对性原理是对于绝对时空而言，**绝对时间就是两个惯性系时间相同，绝对空间就是力场不变和长度、时间具有伽利略变换的不变性（具有相同的时空背景），伽利略变换通过研究质点速度和位移的变换研究动力学规律的变换，**力的坐标不能随着观察者的运动而变化，这一点与狭义相对论中的相对性原理不同，否则可能把不显含时间的力变成显含时间的力，从而力就不是伽利略变换的不变量（例如当把弹簧振子固定在墙上时，在小车系看来不考虑墙的运动，墙与弹簧形成一个场.），有人认为

$d E_P' = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \neq -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$
就是出现了这样的错误，按照这个思路计算动能定理也不满足伽利略变换，显然是错误的.矢量力学只研究实物粒子，不研究力场的分布.势能是用保守力的随体功之和定义，不能利用等时积分计算，此时力就不是伽利略变换的不变量.文献[8]的计算方法是完全错误的.文献[50]也是由于没有正确区分伽利略变换和洛伦兹变换，质点成了在相对空间里运动，利用等时积分得出了"弹性力在惯性系 S 中为保守力，在惯性系 S′系却不是保守力，因而在惯性系 S 中可以引入势能，而在 S′系却不能引入势能."绝对时空观就是时间和空间没有关系，两个惯性系时间相同，空间不变——场的坐标不变.既然不能引入势能，那是何种形式的能量？类似地在固有参照系声波在静止介质中传播，在运动惯性系仍然是声波在静止介质中传播，不能认为在运动惯性系声波变成在运动介质中传播.

由于矢量力学适用于绝对时空，因此场或者力的坐标必须是相对于力源静止坐标系里的坐标(因此力是伽利略变换的不变量包括力场的性质不变)，质点坐标是观察者坐标系里的坐标，这一点和相对论不同，在相对论中场的坐标和质点坐标都是观察者坐标系里的坐标，伽利略变换和洛伦兹变换在这一点上是有区别的，不能仅仅看做是洛伦兹变换的低速近似，伽利略变换只研究质点坐标，不研究场（或者力）的坐标.朗道的书《力学》中说，在惯性参考系中自由运动的质点，由于时间和空间的均匀性和各向同性，表征它所用的拉格朗日函数不显含时间和广义坐标和速度的方向.

保守力利用环路积分为 0 定义，注意这里的环路积分是对于同一个坐标系而言，而不是同一个参照系.参照系和坐标系有时是相同的，有时可以不同.

例 4 在一个相对于地面匀速运动的传送带上放一块小木块，小木块在滑动摩擦力的作用下，从皮带的 A 点向后运动到 B 点，然后和皮带一起运动一段距离，在某一个时刻皮带突然停止，小木块由于惯性向前运动，在滑动摩擦力的作用下从 B 点运动到 A 点，如果以皮带为参照系，小木块受到摩擦力的环路积分为 0，滑动摩擦力成为了保守力.可是小木块的动能不变，内能增加，能量守恒定律不成立.在这里问题的症结在于皮带这个参照系其实代表两个惯性系，开始时相对于地面匀速运动，后来相对于地面静止，其实对于其中任何一个惯性系小木块都没有形成环路.在这里参照系和惯性系不是一回事，这个问题搞不明白，容易出错，把耗散力变成保守力，也可以把保守力变成非保守力.

例 5 假设弹簧振子固定在地面上，小车相对于地面的速度为 **u**，取简化假设 k=1，**u**=1，m=1，A=$\pi/2$， $\omega=1$，在地面上看小球的坐标随时间变化是

$$x(t)=\frac{\pi}{2}\sin t \tag{15}$$

小车上看小球的坐标的变化是

$$x'(t)=\frac{\pi}{2}\sin t - t \tag{16}$$

小球往程出发时（t=0）的坐标是 x（0）= x'（0）=0，那么

在地面上看，从（15）式显然可见，在时间 0<t<π/2 中，小球的坐标 x 随着时间 t 增加，直至 t=π/2，x（t）达到最大值 π/2.

在小车上看，从（16）式容易证明，在时间 0<t<arccos (2/π)内 x'随着时间 t 增加，直至 t= arccos (2/π)，此时 x'（t）达到最大值

$$x'_{\max}=\frac{\pi}{2}\sin(\arccos(2/\pi)) - \arccos(2/\pi) \tag{17}$$

然后 x'（t）随着时间减小，至时间 t=π/2， 达到 x'=0，即回到出发点.

两者比较，由于 arccos (2/π)<π/2， 所以在小车上看小球达到（17)式所表示的最大坐标 x_{max}'时，地面上看小球还未达到它的振幅呢！而当在小车上看，小球已经从最大坐标值回到出发点 x'=0 时（t=π/2），地面上的观察者看到小球正好第一次达到它的振幅.

所以在小车上看，小球在时间 0 到 π/2 内完成了一个往返.力的往返路径积分是

$$Q_1=\int_0^{x'_{\max}} -f_{往程}\cdot dx' + \int_{x'_{\max}}^{0} -f_{返程}\cdot dx' \tag{18}$$

这等式的等号右边两个积分的被积力函数 $f_{往程}(x')$ 和 $f_{返程}(x')$ 有不同的函数形式.因为 $f=-kx=-k(x'+ut)=-(x'+t)$，将此式代入式(18)得

$$Q_2=\int_0^{x'_{\max}}(x'+t)dx'+\int_{x'_{\max}}^{0}(x'+t)\cdot dx' \tag{19}$$

两个积分的被积函数中的 x' 项可以互相抵消，但是 t 作为 x' 的函数 $t(x')$ 是函数 x'（t）的反函数，在 x' 的区间 $(0,x'_{\max})$ 和 $(x'_{\max},0)$ 中的表示式是不同的，分别记为 $t_{往}(x')$ 和 $t_{返}(x')$，它们不能相互抵消，所以 Q_2 不是零.具体计算就是：

从(18)出发.注意到在（11）中，积分的自变量是 x'，其往程和返程的转折点在 $x_{\max}$'，由（17）式表示.现在做变量代换 $x'=x-ut$ ，往程和返程的转折点就要用 $x_{\max}$'所对应的 x 和 t 来表示了.上面式（16）和式（17）之间的文字已经说明，往程和返程的时间转折点是 arcos (2/π)，而根据（15）得此时 x 达到 $x(t)=\frac{\pi}{2}\sin t=\frac{\pi}{2}\sin$（arccos（$2/\pi$）），此即转折点所对应的 x 值.所以（18）式化为

$$Q_2=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}\sin\arccos(2/\pi)}-f\cdot dx+\int_0^{\arccos(2/\pi)}uf\cdot dt\right)+\left(\int_{\frac{\pi}{2}\sin\arccos(2/\pi)}^{\pi/2}-f\cdot dx+\int_{\arccos(2/\pi)}^{\pi/2}uf\cdot dt\right)$$

$$=\int_0^{\pi/2}-f\cdot dx+\int_0^{\pi/2}uf\cdot dt \tag{20}$$

因为 $f=-kx=-x,\ u=1,$ 所以上式化为

$$Q_1=\int_0^{\pi/2}xdx-\int_0^{\pi/2}xdt=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\sin tdt=\frac{\pi^2}{8}+\left.\frac{\pi}{2}\cos t\right|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}\neq 0\ !\ !$$

上面计算过程错误的根源在于理解为质点在小车系空间里运动，时间却是绝对时间，既不是伽利略变换也不是洛伦兹变换，在经典力学中研究问题必须在同一个时空里讨论.时间和长度是伽利略变换的不变量，时间和长度之积是洛伦兹变换的不变量.

在四维时空里，质量（或能量）实际是四维动量的第四维分量，动量是描述物质运动的量，因此质量与运动状态有关就是理所当然的了.在四维时空里，动量和能量实现了统一，称为能量动量四矢.在狭义相对论中能量和动量也具有单独的协变性.

14 分清主要因素与次要因素之间的关系

在实验过程中，影响实验结果的因素有很多，我们必须抓住主要矛盾，以自由落体运动为例说明.在实验过程中存在空气阻力，不仅在竖直方向存在，而且在水平方向空气的流动对于实验的结果都有影响，而且影响结果并非极小，由于自转的影响，落体还有微弱的偏东现象，电梯的顶端和底端重力加速度还有微弱的变化，实验室周围汽车的行驶等都对于实验的结果存在变化，但是我们在这里仅仅是理论分析，忽略这些因素，有些因素影响极小我们根本测量不出来.在其他实验中也存在类似问题，例如无质量的弹簧我们根本做不出来，单摆的摆线不可能没有质量，也并不是绝对不能伸长.上面谈及的这些因素显然远远大于实验过程中对于地球能量的变化对于实验结果的影响，所以在分析过程中也应该忽略这些影响，这是理想化模型，无论是地面系还是电梯系（或者小车系）看做严格的惯性系，不能看做两体问题，按照非惯性系处理.**根据唯物辩证法的观点我们应该抓主要矛盾**，不能甲做自由落体实验地面系是非惯性系，乙做弹簧振子实验地面系是惯性系.当初牛顿也是在忽略这些次要因素的前提下建立经典力学体系的，今天我们仍然可以忽略这些次要因素.在非惯性系中研究机械能守恒问题与力学相对性原理无关，力学相对性原理仅仅针对惯性系而言.笔者建议力学教材明确指明，对于自由落体运动、单摆、弹簧振子等这样简单的力学实验，地球的质量视为充分大，稳定地保持为惯性系，因为系统误差我们根本测量不出来.

15 孤立系统、开放系统和相对性原理

根据现代物理学的观点，系统分为三类：开放系统（系统与外界之间既有物质交换，又有能量交换.）、封闭系统（系统与外界之间没有物质交换，只有能量交换.）、孤立系统（系统与外界之间既没有物质交换，也没有能量交换.）.在任何孤立系统内，经典物理学的相对性原理都成立，能量、动量也都

守恒.有人认为孤立系统内伽利略变换后，能量就不守恒，就是弄错了变换的概念和计算.但是以上经典物理学的相对性原理都仍然成立，相对性原理对于开放系统和孤立系统都成立.例如对于“一个在地面附近自由下落的质点相对地面是孤立系统.在相对于地面匀速上升的电梯中观察者看来，应该仍然被视为是那个孤立系统”.因为这种情况只是经相对于地面匀速上升电梯的一个惯性牵引运动的变换后，从地面的参考系(坐标系)变换到了电梯的参考系(坐标系)，并未加入孤立系统外的任何粒子与其内各粒子不可忽略的相互作用，当然该系统的能量、动量等等都仍然守恒！

系统的开放与孤立具有相对性，以自由落体运动为例，在地面系和相对于地面匀速上升的电梯系，按照内场计算是开放系统（考虑地球能量的变化），按照外场计算是孤立系统（忽略地球能量的变化）.按照外场计算，若只考虑质点的动能，则为开放系统——重力场对质点做功；若考虑质点的机械能，则为孤立系统.考虑了质点的势能，就不能考虑考虑保守力的功.再例如固定在地面的斜面上自由下滑的滑块，若按照重力机械能计算，则为开放系统（在小车系看来斜面支持力做功）；若按照机械能守恒计算则为孤立系统.单摆问题类似，不再说明.弹簧摆按照机械能计算是孤立系统，按照重力机械能计算或者弹力机械能是开放系统.弹簧振子固定在地面上，就组成孤立系统，不包括地球.文献[51]对于开放系统和孤立系统的理解是错误的.孤立系统的拉格朗日函数一定不是显含时间的.

16 重新认识机械能守恒的条件

文献[52]证明了在自由落体运动和斜面问题中机械能守恒定律满足伽利略变换，文献[44] 和[53]说明弹性势能机械能守恒定律满足伽利略变换，文献[45]论证了在引力机械能守恒定律满足伽利略变换.**机械能守恒定律成立的条件其实非常简单——只有保守力做功**[85]（笔者注：或者说不存在耗散力与显含时间的力），这一点其实早已经取得了共识的，后来由于出现了这一场跨世纪的争论，才导致了多种描述，对于这个内容可以参考文献[54～55]和[102].在这里不用区分内力和外力，这是质点动力学问题，对于质点而言都是外力.

现在各个版本的力学教材对于机械能守恒定律的条件叙述不尽相同，例如程守洙、江之永主编的《普通物理学》（第五版）对于系统机械能守恒定律描述为：“如果一个系统内只有保守力做功，其他一切内力和外力不做功，或者它们的总功为 0，则系统内各物体的动能和势能可以相互转化，但机械能的总值不变.”漆安慎、杜婵英主编的《普通物理学教程.力学》的描述为：“在一过程中若外非保守力不做功，又每一对内非保守力不做功，则质点系的机械能守恒”和周衍柏的《理论力学》（第二版）的描述为：“如果作用在质点组上的所有外力及内力都是保守力（或其中只有保守力做功）时，才有：*T*+*V*=*E*，即机械能守恒.”赵凯华、罗蔚茵主编的《新概念力学》描述为：“一个保守系总机械能的增加等于（未计入外场部分的）外力对它所做的功；如果从某个参考系看来，这部分做功为 0，则该系统的机械能不变.”仅当不存在非保守力或非保守力所作之功可以忽略时，系统的动能（包括转动动能）与势能之和为常数，即当 $A_e + A_{id} = 0$ 时 $E = E_k + E_p = 常量$.文献[52]指明了包含外势能的机械能守恒定律成立的条件为只有保守力做功，是正确的.

文献[87～88]都提及这样一个实例：用水平力拉一物体在粗糙的水平面做匀速运动，虽然摩擦力和拉力都做功，但由于做功之和为零，所以物体机械能仍然守恒，因此文献[89]提出：即使存在摩擦和介质阻力，即使物体还发生了动能和其他形式能间的转化，机械能也未必一定不守恒．其实这种观点是错误的，在这里水平拉力是一个恒力，假设没有摩擦力的存在，质点在拉力的作用下运动环路积分显然为0，是一个保守力，所以在这个实例中机械能不守恒，动能不变，拉力势能减少，内能增加，但是能量守恒.文献[87]提出这样一个实例：一匀质圆柱体从粗糙的斜面滚动下来(做无滑滚动)，在整个运动过程中，虽然受摩擦力的作用，但摩擦力并不做功，故整个过程机械能也守恒．实际上在这个过程中非保守力并没有做功，符合上面本文的观点.

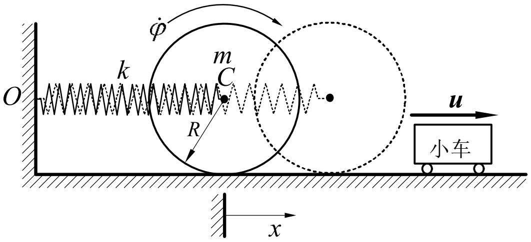


图 2

例 6

图（2）中，弹簧右端连接到半径为 *R* 的均质圆盘中心，圆盘在地面上纯滚动.在纯滚动的约束条件下，这个系统只有一个自由度，圆盘转动的角速度 $\dot{\varphi}$ 与盘心 *C* 的速度($v = \dot{x}$)

关系为 $\dot{\varphi}=\dot{x}/R=v/R$ （21）

在地面参照系下，系统动能为

$$E_{\rm k}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2 \tag{22}$$

其中 J_C 为圆盘绕质心的转动惯量，对均质圆盘有 $J_C=mR^2/2$，将这个关系和式(21)，代入式(22)得到

$$E_{\rm k}=\frac{1}{2}\times\frac{3m}{2}\dot{x}^2$$

在地面参照系下，势能为

$$E_{\rm p}=\frac{1}{2}kx^2$$

在地面参照系下，纯滚动为理想约束，墙壁给弹簧施加的力也不做功，所以系统机械能守恒.如果我们将弹簧拉伸了长度 *A*，然后将圆盘静止释放，那么系统机械能为 $E=kA^2/2$.在振动过程中，机械能守恒的数学表现为

$$E(t)=E_{\rm p}+E_{\rm k}=\frac{1}{2}\times\frac{3m}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\times kx^2=\frac{1}{2}kA^2 \tag{23}$$

对式(23)求导，可建立振动微分方程.考虑到初始速度为 0，位移为 *A*，该微分方程的解为

$$x=A\cos\omega t \tag{24}$$

式中 $\omega=\sqrt{2/3\times k/m}$ 为振动系统固有频率.

伽利略变换是平动变换，对于上面的模型可以认为转动动能不变，在平动方面按照弹簧振子处理，显然机械能守恒定律满足伽利略变换，只不过机械能增加一个平动动能而已.

现在力学教材中的功能原理是错误的，文献[53]和[56]已经指明这个问题，这里不再说明.下面给出一个一般的证明——由于两坐标系间有伽利略变换关系 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t$ 和 $\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$，把它们代入式（3）有 $dE_k=d（\frac{1}{2}mv^2）$

$$=d\,[\frac{1}{2}m（\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}）^2]=d\,E'_{\rm k}+f\cdot udt \tag{25}$$

$$dEp=-\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}'-f\cdot udt=d\,E'_p-f\cdot udt \tag{26}$$

由此有 $dE_k+dE_p=dE_k'+dE_p'=0$ (27)

或者简单证明如下——根据动能定理，设质点仅仅受到保守力的作用，质点从 B 点到 A 点的过程中保守力合力的功为 W，$W\quad E_{\rm k1}\quad E_{\rm k0}$，$E_{\rm k1}$ 是 *A* 点的动能，$E_{\rm k0}$ 是 *B* 点的动能．根据势能定义，$W\quad E_{\rm p0}\quad E_{\rm p1}$，$E_{\rm p1}$ 是 *A* 点的势能，$E_{\rm p0}$ 是 *B* 点的势能．所以 $E_{\rm k1}\quad E_{\rm p1}\quad E_{\rm k0}\quad E_{\rm p0}$．在弹簧+质点的问题中如果考虑弹簧的质量，墙壁的作用力是保守力，它在做功的过程中同时改变弹簧的动能和势能，但不改变系统的机械能，因此只要忽略运动过程中产生的内能（如果考虑运动过程中产生的内能，在所有惯性系机械能都不守恒.），机械能依然守恒.

以上两种方法都说明，在匀速运动的小车系或者电梯系，机械能也是守恒的.或者说机械能守恒定律具有伽利略变换的不变性.文献[47～49]和[57～61]的结论是完全错误的.

对于刚体而言，机械能守恒定律中的动能包括平动动能和转动动能[62]；对于理想流体而言，机械能守恒定律中的势能包括重力势能和压力势能.在非惯性系，当惯性力是保守力时，势能还包括惯性势能[90].在不引入惯性力、折合质量（约化质量）$\frac{mM}{M+m}$ 或者折合力的前提下，牛顿定律、动能定理和机械能守恒定律仅适用于宏观物体绝对时空观下的低速惯性系，对于非惯性系不成立，只能利用惯性系检验力学相对性原理.

牛顿定律满足伽利略变换是动能定理满足伽利略变换的充分条件，动能定理满足伽利略变换是机械能守恒定律满足伽利略变换的充分条件，即牛顿定律满足伽利略变换是机械能守恒定律满足伽利略变换的充分条件[63].由于动能定理是标量方程，与牛顿第二定律并不等价，因此我们得不出必要条件.

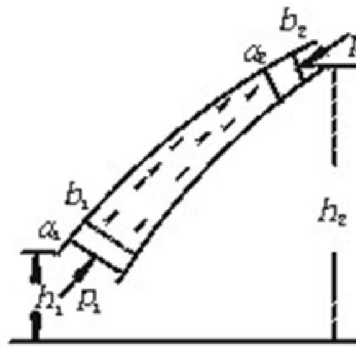
说得更本质一些，由于机械能守恒定律只与质点所受到保守力的合力有关系，而力是伽利略变换的不变量，所以机械能守恒定律满足力学相对性原理.动量守恒定律成立的条件是合外力的冲量为**0**，力和时间都是伽利略变换的不变量，守恒条件具有协变性，所以动量守恒定律具有单独的协变性；机械能守恒定律成立的条件是非保守力为0，而力是伽利略变换的不变量，守恒条件具有协变性，所以机械能守恒定律具有单独的协变性.爱因斯坦认为："普遍的自然规律是由那些对一切坐标系都有效的方程表示的.更简单的理论，涵盖更多不同的内容，具有广阔的应用，这才是令人信服的理论." 爱因斯坦把逻辑简单性作为建构科学理论的方法论原则，也作为科学创造的一个美学思想.因为简单性是秩序感的表现，它使人易于把握事物的特征，具有重大的审美价值.爱因斯坦在创立相对论的过程中就十分强调逻辑简单性. 因为自然界本身是"统一的"、"简单的"、"和谐的"，而反映自然规律的理论体系与客观存在之间存在着主客观的对应关系，所以要求它的逻辑在基础上也必须是简单的.正如爱因斯坦所说:"逻辑简单的东西,当然不一定就是物理上真实的东西.但是,物理上真实的东西一定是逻辑上简单的东西."

能量守恒定律是普遍规律，机械能守恒定律是能量守恒定律在机械运动中的表现形式，因此在经典力学范围内机械能守恒定律是普遍规律.这个问题在国际上也比较纠结[64].机械能守恒定律是机械能对于时间的平移不变性的结果，对于这个问题的讨论文献非常多，本文不再讨论.

17 伯努利方程具有伽利略变换的不变性

伯努利方程是能量方程式,说明在管内作稳定流动的理想液体具有压力能、重力势能和动能三种形式的能量,在适合限定条件的情况下,流场中的三种能量都可以相互转换,但其总和保持不变,这三种能量统称为机械能.由于**理想流体的压力是保守力**[93]，因此压力能也可以称为压力势能.假设地球的质量充分大，从而稳定地保持为惯性系.

1、对于地面系观察者



设在右图的细管中有理想流体在流动，且流动方向从左向右，我们在管的 a_1 处和 a_2 处用横截面截出一段流体，即 a_1 处和 a_2 处之间的流体，作为研究对象．设 a_1 处的横截面积为 S_1，流速为 v_1，高度为 h_1；a_2 处的横截面积为 S_2，流速为 v_2，高度为 h_2.

如图 3 所示，经过很短的时间 Δt，这段流体的左端 S_1 由 a_1 移到 b_1，右端 S_2 由 a_2 移到 b_2，两端移动的距离为 Δl_1 和 Δl_2，左端流入的流体体积为 $\Delta V_1=S_1\Delta l_1$，右端流出的体积为 $\Delta V_2=S_2\Delta l_2$.

$\therefore \Delta V_1=\Delta V_2=\Delta V$

左端的力对流体做的功为

$\because W_1=F_1\Delta l_1$，$F_1=p_1\cdot S_1=p$ $\therefore W_1=p_1S_1\Delta l_1=p_1\Delta V$ 图 3

作用于右端的力 $F_2=p_2S_2$，它对流体做负功(因为右边对这段流体的作用力向左，而这段流体的位移向右)，所做的功为：

$W_2=-F_2\Delta l_2=-p_2S_2\Delta l_2=-p_2\Delta V$

∴两侧外力对研究液体所做的功为：$W=W_1+W_2=(p_1-p_2)\Delta V$.

重力做功 $W_g=\rho g(h_1-h_2)\Delta V$

根据动能定理得 $W+W_g=(p_1-p_2)\Delta V+\rho g(h_1-h_2)\Delta V=\frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2-v_1^2)$

整理后得：$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2$

又 a_1 和 a_2 是在流体中任取的，所以上式可表述为：$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh$ ＝恒量，这就是经典的伯努利方程，式中的三项都具有压强的量纲.其中 $\frac{1}{2}\rho v^2$ 相与流速有关,常称为动压强；ρgh 是由于流体自身所在高度（相对零势面）所产生的压强， p 项与流速无关,常称为静压强.当流体水平流动时，或者高度的影响不显著时，伯努利方程可表达为 $p+\frac{1}{2}\rho v^2$ ＝常量.

$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh$＝C（常数） （1）

把上式两边同除以密度 ρ，便可得到如下的方程

$p/\rho+\frac{1}{2}v^2+gh$＝C′（恒量） （2）

方程（2）可从能量的角度来理解，其物理意义是描述了单位质量的流体的压力势能、动能和重力势能三者之和在同一流线上为一恒量，即说明同一流线上流体的能量守恒.使用经典的伯努利定律必须符合以下假设，方可使用；如没完全符合以下假设，所求的解也是近似值.①定常流：在流动系统中，流体在任何一点之性质不随时间改变.②不可压缩流:密度为常数，在流体为气体适用于马赫数(M)<0.3.③无摩擦流:摩擦效应可忽略，忽略黏滞性效应.④静止惯性参照系，一般指地面系.流体沿着流线流动:流体元素沿着流线而流动，流线间彼此是不相交的.此公式是选择理想流体中的细流管推导得出的，当令截面积趋于 0 时，细流管演变为流线，因此可适用于同一流线上.

把上式两边同除以密度 ρg，便可得到如下的方程

$p/\rho g+\frac{1}{2}v^2/g+h$＝C″（恒量） （3）

该方程在水力学中广泛应用，第一项称为压力头，第二项称为流速头，第三项称为位置头，也称水头，因此该方程说明了同一流线上各点的压力头、流速头和位置头三者之和为一恒量.从上面的方程可以看出，对于静止流体同一高度压强相同，验证了帕斯卡定律.

2、对于小车系观察者

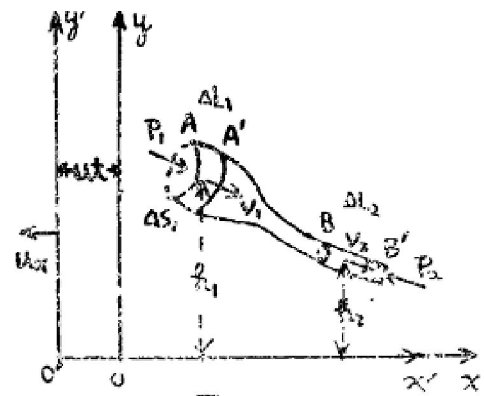


图 4

如图 4 所示，设 xoy 与 x′o′y′坐标系对应平行，且 x′o′y′系相对于固有参照系（地面系）xoy 以恒定速度 u 沿 x 轴的负方向运动，即 u=—u_x，u_y=0，u_z=0.对于 x′o′y′系，在稳定流动的理想流体中截取的细流管，由 AB 位置流到 A′B′位置的过程中，重力不做功，压力做的功等于

$$\Delta W=W_1-W_2=p_1\Delta s_1(\Delta L_1+\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_1}{v_1}t)-p_2\Delta s_2(\Delta L_2+\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_2}{v_2}t)$$

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_2 - E_1\\ &= (E_{BB'} + E_{BA'}) - (E_{AA'} + E_{BA'})\\ &= E_{BB'} - E_{AA'}\\ &= (\frac{1}{2}mv_2^{\ 2} + mgh_2) - (\frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + mgh_1)\\ &= (\frac{1}{2}\rho\Delta L_2\Delta s_2 v_2^{\ 2} + \rho\Delta L_2\Delta s_2 gh_2) - (\frac{1}{2}\rho\Delta L_1\Delta s_1 v_1^{\ 2} + \rho\Delta L_1\Delta s_1 gh_1)\end{aligned}$$

由于流体是连续的，所以有 $\Delta L_2\Delta s_2 = \Delta L_1\Delta s_1$

所以 $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p\frac{u \bullet vt}{v\Delta L} = 常数$ （4）

假设这段流体在静止惯性系中的位移为 r，在运动惯性系中的位移为R.由于 R=r+**ut**= ***r*** ***(t)***+**ut**=**φ(t)**是关于时间 t 的连续函数，这段流体在任何时刻的速度都是唯一存在的，因此 R=**φ(t)**是可导函数，如果该函数出现常值函数区间，这段流体静止，受到的力是 0，不是显含时间的力，下面不研究这个区间，去掉该常值函数区间，该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间，设 D 是该函数的任意一个单调区间，根据反函数的定义在该区间上存在反函数 t=φ^{-1}(R).因此公式（4）变为

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L} = 常数 \quad (5)$$

上式为运动参考系伯努利方程的一般形式，当 u=0 时，两坐标系重合，（5）式便退化为（1），符合对应原理的要求.笔者建议将（5）称为伯努利方程，而经典的伯努利方程为其特例，显然修正后的伯努利方程适用于所有的惯性系，而且具有伽利略变换的不变性——满足力学相对性原理，这样就不会出现文献[65]中的佯谬，定常流经过伽利略变换后仍然是定常流.对于非定常流的问题需要利用柯西-拉格朗日方程研究.

在经典物理学中，理论的建立程序为：实验→方程→对称性，而爱因斯坦在狭义相对论的建立中倒转了这个程序：对称性→方程→实验，在广义相对论中，爱因斯坦把这个倒转过来的程序又应用于引力场方程的建立.另外，当把对称性的概念引入物理学中时，便可以把运动的相对性作为一种对称性来看待.在科学中“一种对称性的发现比一种特定现象的发现意义重大得多.像旋转不变性和洛伦兹不变性这样的时空对称性，统治着整个物理学.”在创立狭义相对论时，爱因斯坦利用了洛仑兹(Hendrik Antoon Lorentz，1853—1928)变换的不变性，而在创立广义相对论时，他把变换不变性提升为物理学的普遍原理，并从引力质量与惯性质量等同这一经验事实出发，把某种变换不变性作为表示空间结构四维性和对称张量的引力方程的前提.

文献[21]得出与公式（5）相似的结论，但是该公式含有时间 t，不符合物理学方程的要求（因为能量守恒定律是时间均匀性的体现，不能含有时间 t.），指出了经典的伯努利方程仅仅适用于静止惯性系（通常指地球坐标系）.文献[94]利用侧壁压力在静止惯性系不做功从而在运动惯性系也不做功，得出伯努利方程在所有惯性系形式完全相同是错误，原因在流体流动中，流管侧管压力对流体微团所做的功只在特定惯性系（流体）在其中作定常流）中一般不等于 0，流体内的压力功也发生了变化.

式中的四项都具有压强的量纲.其中 $\frac{1}{2}$ **ρ**v^2 相与流速有关,常称为动压强；**ρ**gh 是由于流体自身所在高度（相对零势面）所产生的压强，p 项与流速无关,常称为静压强. $p\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$ 为侧压强.当流体水平流动时，或者高度的影响不显著时，伯努利方程可表达为 $p+\frac{1}{2}\rho v^2 + p\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$ ＝常量.如果此时管的粗细相同，侧压力这一项也没有了，变为 $p+\frac{1}{2}\rho v^2$ ＝常量.

把(5)式两边同除以密度 ρ，便可得到如下的方程

$$p/\rho + \frac{1}{2}v^2 + gh + \frac{p}{\rho}\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L} = C'（恒量） \quad (6)$$

方程（6）可从能量的角度来理解，其物理意义是描述了单位质量的流体的压力势能($p/\rho+\frac{p}{\rho}\frac{u\bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$)、动能($\frac{1}{2}v^2$)和重力势能（gh）三者之和在同一流线上为一恒量，即说明同一流线上流体的能量守恒.与静止惯性系比较，压力势能增加了一项$\frac{p}{\rho}\frac{u\bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$，原因在于在动惯性系侧压力做功，出现了一项侧压力势能，流体内压力的功也发生了变化，正压力势能也发生了变化，$\frac{p}{\rho}\frac{u\bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$不仅仅是侧压力势能. 从上面的推导可以得出，在稳定场中势能不可能显含时间，有些文献得出质点在稳定场（例如重力场、弹力场）中运动在某个惯性系势能测量可以显含时间是完全错误的[22].

公式（5）尽管形式复杂，但是满足力学相对性原理（此时可以利用欧拉方程处理问题，因为欧拉方程适用于所有惯性系.）本文的目的不在于推广伯努利方程的应用范围，而是为了说明伯努利方程满足力学相对性原理.文献[65]由于没有认识到这一点，提出因为力对各惯性系而言虽为不变量，但受力作用的质点的位移却因参照系而异，从而功也参照系而异，因此对某一惯性系而言体系能量守恒，对另一个惯性系而言能量可以不守恒.这样机械能守恒定律就不满足力学相对性原理了，进而得出能量守恒定律也不满足力学相对性原理了.伯努利当年从静止惯性系研究，正好缺少这一项.**类似于在某参考系观察一个静止电荷，它只激发静电场，只需用标势 ψ 描述，但是变换到另一参考系时，电荷是运动的，除了电场之外还有磁场，必须用 A 和 ψ 描述.**

方程（6）进一步验证了机械能守恒定律满足力学相对性原理，对于同一个物理过程，如果在一个惯性系机械能（动能+重力势能+压力势能）守恒，在另一个惯性系机械能（动能+重力势能+压力势能）一定守恒.**理解这个问题的关键在于认识侧壁是一个光滑约束，侧压力也是一个保守力（证明非常简单，在地面系侧压力的功始终为 0，环路积分当然为 0.）.**虽然改变流体的动能和势能，但是不改变机械能.

文献[13]也是利用光滑约束中的约束力是保守力处理问题的.**有些分析力学教材认为光滑约束中的约束反力与实位移垂直，约束反力不做功，这是不完善的，因为约束反力在一个惯性系里不做功，在另一个惯性系里可能做功，完整的表述应该为——光滑约束中的约束反力不改变质点的机械能，这样就适用于所有的惯性系了.**在历史上描述低能粒子行为的薛定谔方程对于洛伦兹变换不是协变的，也就是说它不具有相对论的不变性，狄拉克认为这种情况是不合理的.为了把方程改成具有洛伦兹协变形式，得到了狄拉克方程而预言了反粒子.电子的反粒子——正电子在实验中的发现就是狄拉克反粒子理论的最好总结，也是物理理论协变性要求正当性的最好证明[74].

连续性方程是运动学方程，适用于所有的坐标系，包括所有的惯性系和非惯性系，连续性方程中的速度 v 不是相对于观察者的速度，而是流体与管道的相对速度，与伯努利方程中的速度的含义不一样. 证明如下——质量守恒定律告诉我们，同一流体的质量在运动过程中不生不灭.

在流体中取由一定流体质点组成的物质体，其体积为τ，质量为m，则

$$m=\int_\tau \rho\delta\tau \tag{7}$$

为了与随体符号d区别开来，这里用δ来表示对坐标的微分.

根据质量守恒定律，下式在任一时刻都成立

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\int_\tau \rho\delta\tau\right)=0 \tag{8}$$

根据公式：$\frac{d}{dt}\left(\int_\tau \varphi\delta\tau\right)=\int_\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+div\left(\varphi\boldsymbol{v}\right)\right)\delta\tau$（9），得

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\int_\tau \rho\delta\tau\right)=\int_\tau\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\rho\boldsymbol{v}\right)\right)\delta\tau=0 \tag{10}$$

因τ是任意取的，且假定被积函数连续，由此推出被积函数恒为 0，于是有：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\rho\boldsymbol{v}\right)=0 \tag{11}$$

（11）式就是与坐标系选取无关的微分形式的连续性方程.

有关流体的一切定律，均可以从流体能量-动量张量获得：$T_{\mu\nu}=(\rho c^2+p)U_\mu U_\nu-pg_{\mu\nu}$（$g_{\mu\nu}$ 为时空度规，U_μ 为四维速度）.这个流体能量-动量张量具有 Lorentz 协变性（因而在低速下，也具有 Galileo 协变性）. 通常我们研究流体，总是愿意选择质心坐标系（如果是在宇宙学中，我们选择随动（共动）坐标系），这样就可以简化流体能量-动量张量.通常的伯努利方程，也属于这种简化的产物，它仅仅属于流体的质心坐标系.至于一般参考系中的伯努利方程，也可以从上面的流体能量-动量张量（$T_{\mu\nu}=(\rho c^2+p)U_\mu U_\nu-pg_{\mu\nu}$）获得，只要对它求协变散度即可.所以既然已经有了一般的流体能量-动量张量（$T_{\mu\nu}=(\rho c^2+p)U_\mu U_\nu-pg_{\mu\nu}$），那就等价于我们已经有了一般参考系中的伯努利方程.所以一般参考系中的伯努利方程，不再是一个很有必要研究的问题.相反要简化，有意研究特殊参考系中的（简化了的）伯努利方程，不想去研究一般参考系中的伯努利方程.

18 欧拉方程具有伽利略变换的不变性

“对称是美的化身”.李政道教授认为：“物理定律一定是对称的，失去的对称性应该到物理真空中去找”.这足以说明，对称性是物理学中广泛存在的一种美的属性.对称性既是爱因斯坦科学研究的一种方法论原则，又是他科学创造的一个美学思想.

在理想流体力学中动力学基本方程是欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+(\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v}=\mathrm{G}-\frac{1}{\rho}\nabla P\cdots\cdots(1)$$

或

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\mathrm{v}^2-\mathrm{v}\times(\nabla\times\mathrm{v})=\mathrm{G}-\frac{1}{\rho}\nabla P$$

下面证明欧拉方程在惯性坐标系变换下的协变性：

在方程（1）中 **G**、ρ、P、t 是不变量，可直接变换为 **G**′、ρ′、P′、t′；**v** 变换为 **v**′+**u**.其中 **u** 是常矢，故

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\frac{\partial(\mathbf{v}'+\mathbf{u})}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t'};$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\nabla(\mathbf{v}'+\mathbf{u})=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\nabla\mathbf{v}'$$

再考虑算符▽ $=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 的坐标变换，单位矢 **i**、**j**、**k** 都是不变量，可用 **i**′、**j**′、**k**′代入，y、z 用 y′、z′代入.但

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial(x-ut)}{\partial x}=(1-u\frac{\partial t}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x'},$$

当算符▽所作用场量为压强 P 时，t 与 x 可认为是独立坐标，从而 $\frac{\partial t}{\partial x}=0,\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'},\nabla P=\nabla'P'$

当算符▽作用于场量 **v** 时，t 与 x 是相关的，$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{dx}{dt}=v_x$，从而 $\frac{\partial}{\partial x}=(1-\frac{u}{v_x})\frac{\partial}{\partial x'}$

$$\therefore\nabla=(1-\frac{u}{v_x})\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'}+\mathbf{j}'\frac{\partial}{\partial y'}+\mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial z'}=\nabla'-\frac{u\mathbf{i}'}{v_x}\frac{\partial}{\partial x'}=\nabla'-\frac{u}{v_x'+u}\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'}\cdot \quad \text{-----（2）}$$

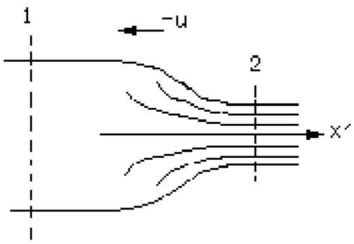
将（2）式代入

$$\mathbf{v}\cdot\nabla=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\nabla=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot(\nabla'-\frac{u}{v_x'+u}\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'})=\mathbf{v}'\cdot\nabla'+\mathbf{u}\cdot\nabla'-(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\frac{u\mathbf{i}}{v_x'+u}\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$=\mathbf{v}'\cdot\nabla'+\mathbf{u}\cdot\nabla'-u\frac{\partial}{\partial x'}=\mathbf{v}'\cdot\nabla'$$

欧拉方程最终变换为：

$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'}+(\mathbf{v}'\cdot\nabla')\mathbf{v}'=\mathbf{G}'-\frac{1}{\rho'}\nabla' P'$.可见，欧拉方程在 x′系中的形式与在 x 系中形式完全相同.



图b

欧拉方程在惯性坐标系变换下协变是意料中的，因为欧拉方程是牛顿运动定律在流体力学中的表达，而牛顿运动定律对伽利略变换是协变的，故对欧拉方程自然也协变.

类似地，读者可以证明流体力学中的兰姆型的理想流体运动方程、柯西-拉格朗日定理、兰姆霍兹方程等流体动力学都满足伽利略变换，在此从略.

狄拉克认为：简单性属于美，简单性原则改为数学美原理.所有自然规律都只是近似的……是表现我们现有知识状态的近似.数学感兴趣的规则也正是自然界所选择的规则.基本的物理规律是以美和有力的方式来描述的，这是自然界的基本特征.我想我正是和这一概念（优美的数学）一起来到这个世界的.这种对数学美的欣赏曾支配着我们的全部工作.这是我们的一种信条……这对我们像是一种宗教，奉行这种宗教是很有益的，可以把它看成是我们许多成功的基础.凡是在数学上是美的在描述在基本物理学方面就很可能是有价值的.这实在是比以前任何思想都需要更加基本的思想，描述基本物理理论的数学方程中必须有美.今天我觉得在物理学中，人们最好的出发点是假定物理学务必要建立在优美的方程式上.应当学会在自己的思想中能不参照数学形式而掌握物理概念，并尽可能地了解数学形式的物理意义.研究者在他把基本的自然规律以数学形式表达出来的努力中应当力争数学美.很有可能物理学的下一个进展是沿着这样的路线：人们首先方程，并且需要若干年的发展以找出这个方程背后的物理思想.抓住不变量与变换式之间的矛盾，并通过不断扩大变换的不变性，来解决二者的矛盾，从而达到改革旧理论，发展新理论的目的.进一步前进的方向是使我们的方程在越来越广泛的变换中具有不变性.

19 流体力学中能量守恒定律在所有的惯性系都成立

首先根据能量守恒定律推导与坐标系选取无关的微分形式的能量方程：

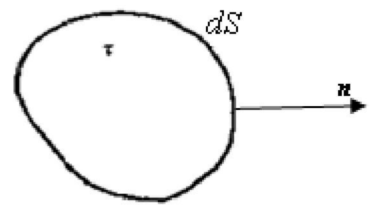


图2

任取一包含 M 点的体积为 τ 的流体，设其界面为 S，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线单位矢量，如图 2.则能量守恒定律可以表述为：体积 τ 内流体的动能和内能的改变率等于单位时间内质量力和面力所作的功加上单位时间内给予体积 τ 的热量，容易看到，体积 τ 内动能和内能总和是：

$$\int_\tau \rho\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau$$

其中 U 是单位质量的内能，而质量力和面力所作的功则是

$\int_\tau \rho \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\delta\tau$ 及 $\int_\tau \boldsymbol{p}_n \boldsymbol{v}\delta S$.单位时间内由于热传导通过表面 δS 传给 τ 内的热量是 $k\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\delta S$，其中 k 为热传导系数，故单位时间内由于热传导通过 S 传入的热量为 $\int_s k\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\delta S$.单位时间内由于辐射或其它原因传入 τ 的总热量为 $\int_\tau \rho q\delta\tau$，其中 q 为由于辐射或其它原因在单位时间内传入单位质量的热量分布函数.

能量守恒定律可以写为：

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau=\int_\tau \rho\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\delta\tau+\int_\tau \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{v}\delta S+\int_s k\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\delta S+\int_\tau \rho q\delta\tau \qquad (1)$$

根据公式 $\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\varphi\delta\tau = \int_\tau \rho\frac{d\varphi}{dt}\delta\tau$ （2），将上式中的随体导数改写为：

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau = \int_\tau \rho\frac{d}{dt}\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau$$

此外根据奥高公式将（1）中的面积分化为体积分：

$$\int_\tau \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{v}\delta S = \int_s (\boldsymbol{n}P)\bullet\boldsymbol{v}\delta S = \int_s \boldsymbol{n}\bullet(P\boldsymbol{v})\delta S = \int_\tau div(P\boldsymbol{v})\delta\tau$$

$$\int_s k\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\delta S = \int_\tau div(kgrad\,T)\delta\tau$$

于是（1）式可以写为：

$$\int_\tau \rho\frac{d}{dt}\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau = \int_\tau \rho\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\delta\tau + \int_\tau div(P\boldsymbol{v})\delta\tau + \int_\tau div(kgrad\,T)\delta\tau + \int_\tau \rho q\delta\tau$$

因 τ 任意，且假定被积函数连续，由此推出被积函数恒为 0，即：

$$\rho\frac{d\left(\frac{V^2}{2}\right)}{dt} + \rho\frac{dU}{dt} + = \rho\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{v} + div(P\boldsymbol{v}) + div(kgrad\,T) + \rho q \qquad (2)$$

虽然（2）式是微分形式的方程，但是不够简洁.下面我们推到更简洁的能量方程.

因为 P 是对称张量，所以有：

$$div(P\bullet\boldsymbol{v}) = div(\boldsymbol{v}\bullet P) = \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i p_{ij}) = v_i\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + p_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad (3)$$

由张量分解定理得：$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 可以写成：$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = s_{ij} + a_{ij} = s_{ij} + (-\varepsilon_{ijm}\omega_m)$ （4）

其中 s_{ij} 为对称张量，a_{ij} 为反对称张量.从而（3）可以改写为：

$$div(P\bullet\boldsymbol{v}) = v_i\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + p_{ij}a_{ij} + p_{ij}s_{ij} \qquad (5)$$

又因为 $p_{ij}a_{ij} = 0$，则（5）可以改写为：$div(P\bullet\boldsymbol{v}) = v_i\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + + p_{ij}s_{ij}$ （6）

将（6）代入（2）得：

$$\rho\frac{d\left(\frac{V^2}{2}\right)}{dt} + \rho\frac{dU}{dt} = \rho\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\bullet divP + P:S + div(kgrad\,T) + \rho q \qquad (7)$$

在 $\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho\boldsymbol{F} + \mathrm{div}P$ 式左右两边点乘速度矢量 $\boldsymbol{v}$，得：

$$\rho \boldsymbol{v} \bullet \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \bullet \mathrm{div} P$$ 即： $$\rho \frac{d\left(\frac{V^2}{2}\right)}{dt} = \rho \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \bullet \mathrm{div} P$$

（8）

将上式代入 (3.7) 得： $$\rho \frac{dU}{dt} = P : S + div\left(kgrad\, T\right) + \rho q$$ （9）

虽然（9）式也是微分形式的方程，但是为了更好地写出曲线坐标下的形式，继续利用本构方程(在下一小节进行推导)写出另一种微分形式的方程.

将本构方程 $P = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right) + \mu' s_{kk}\delta_{ij}$ 代入 $P : S = p_{ij}s_{ji}$ 中有：

$$P : S = p_{ij}s_{ji} = \left[-p\delta_{ij} + 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right) + \mu' s_{kk}\delta_{ij}\right]s_{ji}$$

$$= -p\delta_{kk} + 2\mu\left(s_{ij}s_{ji} - \frac{1}{3}s_{kk}^2\right) + \mu' s_{kk}^2$$

定义 $\phi = -\frac{2}{3}\mu\left(div\, \boldsymbol{v}\right)^2 + 2\mu S : S$ （10）为耗损函数并将其代入上式得：

$$P : S = -pdiv\, \boldsymbol{v} + \phi + \mu' div\, \boldsymbol{v}$$

当斯托克顿假设 $\mu' = 0$ 成立时有 $P : S = -pdiv\, \boldsymbol{v} + \phi$，将其代入（9）得：

$$\rho \frac{dU}{dt} + pdiv\, \boldsymbol{v} = \phi + div\left(kgrad\, T\right) + \rho q$$

利用连续性方程得： $$pdiv\, \boldsymbol{v} = -\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \rho p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$，于是有：

$$\rho\left[\frac{dU}{dt} + p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = \phi + div\left(kgrad\, T\right) + \rho q$$

（11）

由热力学知识有： $$Tds = dU + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$$， s 为熵.将其代入上式得：

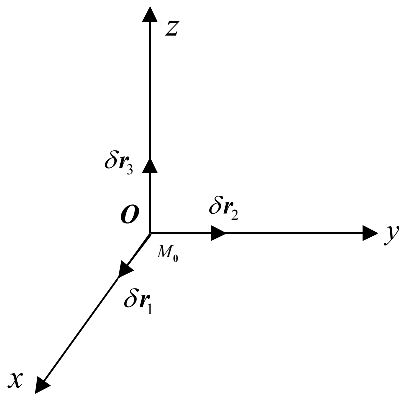
$$\rho T\frac{ds}{dt} = \phi + div\left(kgrad\, T\right) + \rho q$$

（12）

到处我们已经推到出了我们所需要的能量方程了，下面将写出它在曲线坐标下的具体形式：先写出 $div\left(kgrad\, T\right)$ 的具体形式，再写出 ϕ 的具体形式就可以写出（12）的具体形式.

因为 $$grad\, T = \frac{1}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial T}{\partial q_3}\vec{e}_3$$，再根据 $$div\boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial\left(a_1H_2H_3\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(a_2H_3H_1\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(a_3H_1H_2\right)}{\partial q_3}\right]$$ 有：

$$div\left(kgrad\,T\right)=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}k\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}k\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_2H_1}{H_3}k\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)\right] \quad (13)$$



要写出 ϕ 的具体形式必须先写出对称张量 S 在曲线坐标系下的形式.

我们首先推导 $s_{11,}s_{12}$ 的表达式，过 M_0 点做正交曲线坐标系 $\left(q_1,q_2,q_3\right)$，在坐标轴上取流体质点组成的线段元 $\delta\boldsymbol{r}_1\left(\delta s_1,0,0\right),\delta\boldsymbol{r}_2\left(0,\delta s_2,0\right),\delta\boldsymbol{r}_3\left(0,0,\delta s_3\right)$，如右图.于是：

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\boldsymbol{r}_1\right)=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial s_1}\delta s_1=\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_1\vec{e}_3\right)\right]\delta s_1$$

$$=\left[\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial q_1}\vec{e}_1+\frac{\partial v_2}{\partial q_1}\vec{e}_2+\frac{\partial v_3}{\partial q_1}\vec{e}_3+v_1\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial q_1}+v_2\frac{\partial\vec{e}_2}{\partial q_1}+v_3\frac{\partial\vec{e}_3}{\partial q_1}\right)\right]\delta s_1$$

将
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\vec{e}_1}{\partial q_1}=-\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}\vec{e}_2-\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}\vec{e}_3\\ \dfrac{\partial\vec{e}_2}{\partial q_1}=\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}\vec{e}_1\\ \dfrac{\partial\vec{e}_3}{\partial q_1}=\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}\vec{e}_1\end{cases}$$
代入代入上式得：

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\boldsymbol{r}_1\right)=\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)\delta s_1\vec{e}_1+\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}-\frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)\delta s_1\vec{e}_2$$
$$+\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial q_1}-\frac{v_1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)\delta s_1\vec{e}_3$$

由此推出

$$\delta s_1\frac{d}{dt}\left(\delta s_1\right)=\left(\delta\boldsymbol{r}_1\right)\frac{d}{dt}\left(\delta\boldsymbol{r}_1\right)=\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)\delta s_1^2$$

于是
$$s_{11}=\frac{1}{\delta s_1}\frac{d}{dt}\left(\delta s_1\right)=\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}$$

其次我们有
$$\left(\delta\boldsymbol{r}_2\right)\frac{d}{dt}\left(\delta\boldsymbol{r}_1\right)=\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}-\frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)\delta s_1\delta s_2$$

下标 1 和 2 轮换得：

$$\left(\delta r_1\right)\frac{d}{dt}\left(\delta \boldsymbol{r}_2\right)=\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}-\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)\delta s_1\delta s_2$$

两式相加得：

$$-\frac{d\gamma_{12}}{dt}\delta s_1\delta s_2=\frac{d}{dt}\left(\delta \boldsymbol{r}_1\bullet\delta \boldsymbol{r}_1\right)$$

$$=\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}-\frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)\delta s_1\delta s_2$$

由此得：

$$2s_{12}=2s_{21}=-\frac{d\gamma_{12}}{dt}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}-\frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}$$

采取下标轮换得方法可得 s_{22},s_{33} 及 s_{23},s_{31}，综合起来得到 S 在曲线曲线坐标下的形式：

$$\begin{cases}s_{11}=\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial v_1}{\partial q_1}+\dfrac{v_2}{H_1H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}+\dfrac{v_3}{H_1H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}\\ s_{22}=\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial v_2}{\partial q_2}+\dfrac{v_3}{H_2H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_3}+\dfrac{v_1}{H_2H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_1}\\ s_{33}=\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial v_3}{\partial q_3}+\dfrac{v_1}{H_3H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_1}+\dfrac{v_2}{H_3H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_2}\\ 2s_{12}=2s_{21}=\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial v_2}{\partial q_1}+\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial v_1}{\partial q_2}-\dfrac{v_1}{H_1H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}-\dfrac{v_2}{H_1H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_1}\\ 2s_{23}=2s_{32}=\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial v_3}{\partial q_2}+\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial v_2}{\partial q_3}-\dfrac{v_2}{H_2H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_3}-\dfrac{v_3}{H_2H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_2}\\ 2s_{31}=2s_{13}=\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial v_1}{\partial q_3}+\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial v_3}{\partial q_1}-\dfrac{v_3}{H_3H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_1}-\dfrac{v_1}{H_3H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}\end{cases}\tag{14}$$

另外

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial\left(v_1H_2H_3\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(v_2H_3H_1\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(v_3H_1H_2\right)}{\partial q_3}\right]\tag{15}$$

分别将（14）和（15）式代入（10），即可得出 ϕ 在曲线坐标系下的具体形式.

将 ϕ 在曲线坐标系下的具体形式和（13）代入（12）即可得出能量方程在曲线坐标系下的形式为：

$$\rho T\frac{ds}{dt}=\phi+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}k\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}k\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_2H_1}{H_3}k\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)\right]+\rho q\tag{16}$$

其中 ϕ 由（14）和（15）决定.

根据上面的推导可以看出，流体中能量守恒定律在所有的惯性系都成立，伯努利方程是能量守恒定律在流体中体现形式，所以伯努利方程在所有的惯性系都成立.爱因斯坦认为，评价一个理论美不美，标准是原理上的简单性.这里的简单性是指逻辑简单性，即在科学理论中，作为逻辑出发点的彼此独立的初始命题（假设或公理）的数量要尽可能的少，通过逻辑演绎概括尽可能多的经验事实.因为“理论的前提简单性越大，它所涉及的事物种类就越多，它的应用范围就越广，给人们的美感就越深”.爱因斯坦把逻辑简单性作为建构科学理论的方法论原则，也作为科学创造的一个美学思想.因为简单性是秩序感的表现，它使人易于把握事物的特征，具有重大的审美价值

力学相对性原理类似于“脚”，伯努利方程等具体的物理方程类似于“鞋”，这样就容易理解它们之间的关系了.通常认为方程的协变性具有特别重大

的意义，协变性的含义如下：凡施行坐标变换，应变量（函数）亦必按确定的（例如张量的）规则而变换，我们研究坐标变换时必须同时注意原来的和变换后的函数所满足的方程形式，如果变换后所得到的新变量的新系数和旧变量的旧函数—祥能满足同样形式的方程，则方程就是协变的，由方程的协变性，使我们无须预先选定坐标系就能写出方程，此外因为方程的协变性限制方程形式的种类，同时还帮助挑选正确的形式，故方程的协变性对推动研究工作有重大的意义.但必须着重指出，仅当引入函数的数目亦有限制时，协变性对方程的形式的限制方属有效；如果能引进任何数目的新辅助函数，那事实上可以赋予任何方程以协变的形式.因此方程协变性本身绝不表示任何物理定律，例如在质点系力学中，第二类拉格朗日方程对任意坐标变换都是协变的，而用直角坐标系写出的第一类拉格明日方程则不是协变的，但前者与后者比较，并不表示任何新的物理定律.在拉格朗日方程的情况下，协变性是这样达到的，就是引进用速度表示的二次（不一定是齐次的）拉格朗日函数的系数作为新的辅助函数.

在物理学中，尤其是在理论物理学中，我们所说的不变性指的是体系的拉格朗日量或者哈密顿量在某种变换下的不变性.这些变换一般可分为连续变换、分立变换和对于内禀参量的变换.每一种变换下的不变性，都对应一种守恒律，意味着存在某种不可观测量.物理学中的守恒定律被看作是最基本的自然法则，它们以切实的可靠性和极大的普遍性预言哪些过程是允许的，哪些过程是不被允许的，而不必考虑过程进行的细节.与自然界所有定律一样，守恒定律的正确依赖于实验.新的实验可能会发现某个不满足守恒定律的假象，只要仔细分析，必然发现是那些从前未被发现的因素影响了结果.守恒意味着不变（如一定条件下动量、角动量、能量的总量不变），这种不变又由对称性法则所制约.从空间平移的不变性（也称空间平移对称性、空间的均匀性）推出动量守恒定律， 意味着空间的绝对位置不可观测；从空间转动不变性（也称空间转动对称性、空间的各向同性）推出角动量守恒定律，意味着空间的绝对方向不可观测；从时间不变性（也称时间对称性、时间的均匀性）推出能量守恒定律，意味着时间的原点不可观测.

能量守恒定律相是普遍规律，比牛顿定律更基本，具有单独的协变性，相对性原理和能量守恒定律是物理学中的“宪法”，其他“法律”（理论）必须表述为满足它的形式.对于同一个物理过程，能量守恒定律具有伽利略变换的不变性，如果在一个惯性系里是守恒，那么在另一个惯性系里一定是守恒[66]，因此在弹簧+质点的系统中如果考虑弹簧的质量，忽略弹簧形变过程中产生的内能，在各个惯性系中测量的机械能也是守恒的.在经典力学中如果只有保守力，机械能也具有伽利略变换的不变性.机械能守恒定律应该表述为满足力学相对性原理的形式[67]，这样矢量力学体系内部才能保证统一和和谐. (在非惯性系里，如果惯性力不是保守力，那么就是显含时间的力，系统就是非封闭系统，能量不守恒.一句话，**封闭系统对于所有的坐标系能量都守恒.)**文献[41]之指出“能量守恒定律不仅对于封闭系统成立，对位于定常外场(即不显含时间) 中的系统也成立.能量守恒的力学系统也称为保守系统.”

在经典力学中守恒定律与体系对称性之间有密切联系.在一个体系中有的力学量是不随时间改变的，这种力学量称为守恒量.对于用Lagrange函数描述的体系，如果在空间坐标平移具有不变性，则体系的动量守恒，若具有空间旋转不变性，则角动量守恒.Lagrange函数时间平移的不变性，将导致体系的能量守恒.

力学相对性原理是对称性原理在力学中的重要体现，对称原理是一个普遍的原理.海森堡提出:“万物的始原是对称性”，“对称性常常构成一个理论的最主要的特征”.“所有的自然界的基本定律都带有某些对称性”，而“所有的物理学的第一性原理都是建筑在对称性的基础上.”实现爱因斯坦所说的“对自然现象进行逻辑上前后一贯的摹写”的科学价值.

20 声波运动方程具有伽利略变换的不变性

波动方程是波的动力学方程，给出了介质内体元的运动和受力的关系，反映了波动传播的机制，波的运动学方程是波动方程的解.由于波动方程在推导过程中利用了牛顿第二定律，因此应当满足伽利略变换.声波波动方程是否具有伽利略变换下的形式不变性，即声波的波动方程是否满足力学相对性原理的问题，文献[47]说：“其实不协变的定律很多，例如：

例1 对于均匀各向同性介质，如果介质是静止的，则声波方程是

$$\frac{\partial^2 U(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 U(\boldsymbol{r},t)$$

这里 $\boldsymbol{U}$ 为波动量，a 为声速.容易验证此定律不具有伽利略变换下的形式不变性 ”

由于声波的运动动方程由牛顿第二定律得出，如果波动方程不满足伽利略变换，说明经典力学存在着严重的问题，因此研究这个问题意义比较重大

下面我们假定媒质空气静止，声源静止，证明声波的运动学方程和波动方程经伽利略变换形式不变，望力学界的专家学者批评指正.

为简单起见，设介质在惯性系 S 中静止，波函数用 ψ 表示，同时假定单频平面声波沿 x 轴正方向传播，波速为 v, 频率为 f，声源静止，观测者 S′向声源右方运动，速度为 u,则声波的运动学方程为

在 S 系 $\psi(x,t)=A\cos 2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)$

( )

在 S 坐标系，波动方程为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi$$

( )

S、S′两坐标系坐标变换关系为

$$\begin{cases} x=x'+ut \\ t=t' \end{cases}$$

将式（ ）式代入式（ ）式，可以得出在 S′坐标系声波的运动学方程为

$$\psi'(x',t')=A\cos 2\pi f\left(t'-\frac{x'+ut'}{v}\right)\quad A\cos 2\pi f\left[t'\left(1-\frac{u}{v}\right)-\frac{x'}{v}\right]$$

$$\cos 2\pi f\left(1-\frac{u}{v}\right)\left(t'-\frac{x'}{v-u}\right)$$

令 $f'=f\left(1-\frac{u}{v}\right)$，$v'=v-u$，则有

$$\psi'(x',t')=A\cos 2\pi f'\left(t'-\frac{x'}{v'}\right)$$

(

将式（ 与式（ 比较，说明声波的运动学方程经伽利略变换后形式不变

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}=-(2\pi f')^2A\cos 2\pi f'\left(t'-\frac{x'}{v'}\right),\quad \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}=-\frac{(2\pi f')^2}{v'^2}A\cos 2\pi f'\left(t'-\frac{x'}{v'}\right)$$

由 这 两 个 式 子 我 们 便 得 到 ，

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}=v'^2\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}$$

比较式（ 、 ，说明波动方程经伽利略变换下的形式不变性 由于机械波必须在媒质中传播，而波相对于媒质的速度是恒量，所以在多普勒效应中起作用的是波源及观察者相对于媒质的速度，而不是波源与观察者之间的相对速度[91]，所以在这里声速不是不变量 但是在本题中由于我们假定波源相对于媒质不变，因此观察者相对于波源的速度等价于观察者相对于媒质的速度 在S′系我们只对波的运动学方程和波动方程进行坐标变换，不用管介质的问题,如果按照运动介质处理就错了,牛顿力学适用于绝对时空，介质不变.文献[92]得出与本文一致的结论.研究多普勒效应对于非均匀介质，还需要考虑折射率的变化，限于篇幅本文不再讨论.

说明：1.多普勒效应是坐标变换的结果[103~119]，$f'=f\left(1-\frac{u}{v}\right)$，此即为波源静止，观察者远离波源方向运动时的多普勒效应；波源静止而观察者向着波源方向运动、观察者静止而波源远离观察者方向运动、观察者静止而波源向着观察者方向运动时的多普勒效应公式参见文献[107]，根据本文的分析方法考

察声波运动学方程和波动方程得出的结果一致——声波运动学方程和波动方程具有伽利略变换下的形式不变性，本文不再分析.

2.在 S'系我们只对波的运动学方程和波动方程进行坐标变换，不用管介质的问题，如果按照运动介质处理就错了，此时声波的运动学方程（4）的伽利略变换式是文献[47]的（8）式的结果部分，在一维情况下简化为

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial t'^2}-2u\frac{\partial^2 U'}{\partial t'\partial x'}-(v^2-u^2)\frac{\partial^2 U'}{\partial x'^2}=0 \qquad (6')$$

此式与（4）式明显不是同一形式！所以，声波方程不具有伽利略变换下的形式不变性！但是如文献[47] (8)式所示，它属于以介质平动速度 u 为参数的声波运动规律最小协变集， 一维情况下为:

{当介质平动速度为u时，声波方程为 $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-2u\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}-(v^2-u^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$ (7′)} 在单向波的特殊情况下成立 $\frac{\partial U'}{\partial t'}=-v'\frac{\partial U'}{\partial x'}$

于是，（6′）式才能化为（6）式.这是对于伽利略变换的错误理解.类似的，研究机械能守恒定律满足伽利略变换时，场的坐标与质点的坐标不一样，不能混为一谈，重力、弹簧弹力和万有引力都是稳定场，不是显含时间的力场.

声波是大量声子时空相宇统计的结果，它的运动方程中的声速 a，是随不同介质及其不同状态而不同，而与质点粒子的运动方程不同.特别是，类比光子按狭义相对论物体粒子运动质量的公式，其中的光速 c，改换为相应介质中的声速 a，即其运动质量的表达式： $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ，m_0 是 v=0 时的静止质量.因而声子的静止质量也为 0，是与质点粒子不同的粒子，其动量就需由其大量同种粒子统计得到的波长或频率和速度表达.其在介质中的速度是介质状态的函数，在标准状态空气中的速度=a_0，可由介质粒子运动波动方程的解表达，而且物体在介质在的运动速度，可能超过相应介质的声速 a，而成为超声. 研究多普勒效应对于非均匀介质，还需要考虑折射率的变化，限于篇幅本文不再讨论 本文在此从略，有兴趣的的读者可以自己研究这个问题.文献[109]得出与本文一致的结论.

声波运动方程满足伽利略变换，电磁波的麦克斯韦方程组满足洛伦兹变换，关于这个问题的证明的文献很多，文献[110～119]是其中一部分.

爱因斯坦认为:“科学没有永恒的理论，一个理论所预言的论据常常被实验所推翻.任何一个理论都有它的逐渐发展和成功的时期，经过这个时间以后，它就很快地衰落.与一个没有意义问题的正确答案相比，一个重要问题的错误答案具有无法比拟的重要意义.物理学中没有任何概念是先验地必然的，或者是先验地正确的.惟一地决定一个概念的‘生存权’的，是它同物理事件(实验)是否有清晰的和单一而无歧义的联系.只有考虑到理论思维同感觉经验材料全部总和的关系，才能达到理论思维的真理性.”

21 角动量守恒定律满足力学相对性原理

㈠经典的角动量守恒定律不满足伽利略变换

角动量守恒定律是反映质点和质点系围绕一点或一轴运动的普遍规律,尽管角动量守恒定律可以从牛顿定律中推导出来,但是它不受牛顿定律适用范围的限制,不论是研究物体的低速运动还是高速运动,不论是宏观领域的物理现象还是微观领域的物理过程,角动量守恒定律已被大量实验证明是正确的,无一相悖.角动量守恒的实质上对应着空间旋转不变性(体系整体绕任意轴 n 旋转 δφ 时,体系的哈密顿算符不变).当体系处于中心对称场或无外场时,体系具有空间旋转不变性.例如当考虑到太阳系中的行星受到太阳的万有引力这一有心力时,由于万有引力对太阳这个参考点力矩为零,所以它们以太阳为参考点的角动量守恒,这也说明了行星绕太阳公转单位时间内与太阳连线扫过的面积大小总是恒定值的原因.

例 7 匀速圆周运动

如下图 5,有一质量为 m 的小球（视为质点）,在轻绳（忽略质量）的牵制下,在光滑的地面上绕 O 点做匀速（速率为 v）圆周运动,如果忽略地面和空气摩擦阻力,

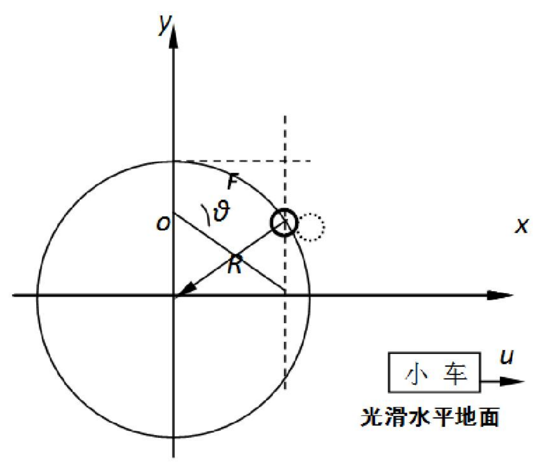


图 5 匀速圆周运动的物体角动量守恒定律成立问题

问：小球在地面系和沿 x 轴匀速运动的小车

（设小车的速度为 u）坐标系(O_1-x_1y_1),角动量守恒定律是否都成立?

解析:地球质量视为充分大,故稳定地保持为惯性系.

1、在地面系——设初相为 0,$v=\omega R$,

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y=R\sin\omega t \end{cases} \quad \begin{cases} x'=-R\omega\sin\omega t \\ y'=R\omega\cos\omega t \end{cases} \quad \begin{cases} f_x=m\,x''=-mR\omega^2\cos\omega t \\ f_y=m\,y''=-mR\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

$L=R\times f$ **=0,** 质点对圆心的角动量大小为 $mR^2\omega$,方向不变,角动量守恒定律成立.

2、小车系

将运动方程作伽利略变换,写出小车系运动方程:

$$\begin{cases} x_1=x-ut=R\cos\omega t-ut \\ y_1=y=R\sin\omega t \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1=x'-u=-R\omega\sin\omega t-u \\ y'_1=y'=R\omega\cos\omega t \end{cases}$$

$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=(-mR\omega\sin\omega t-mu,\ mR\omega\cos\omega t,0)$

$\boldsymbol{r}=(R\cos\omega t-ut,\ R\sin\omega t,0)$

$$\begin{cases} f_x=m\,x''=-mR\omega^2\cos\omega t \\ f_y=m\,y''=-mR\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

$\boldsymbol{L_1}=\boldsymbol{r_1}\times\boldsymbol{p_1}=(0,0,\ mR^2\omega+umR\sin\omega t-utmR\omega\cos\omega t)$

$\boldsymbol{L_1}'=(0,0,\ utmR\omega^2\sin\omega t)$

$M_1=\boldsymbol{r_1}\times\boldsymbol{f}=(0,0,\ utmR\omega^2\sin\omega t)$

根据上面的计算可以得出,角动量不具有伽利略变换的不变性,合力矩也不具有伽利略变换的不变性,经典的角动量守恒定律也不具有伽利略变换的不变性,即不满足力学相对性原理,文献[61]和[95]以椭圆运动为例也说明了这个问题.文献[96]也证明了这个问题.力学相对性原理（伽利略相对性原理）仅指经典力学定律在任何惯性参考系（惯性系）中数学形式不变，换言之，所有惯性系都是等价（平权）的.**因为力学相对性原理要求所有的惯性系等价，同一个物理过程在固有惯性参照系角动量守恒，在运动惯性参照系角动量不守恒，这是力学相对性原理所不允许的.**角动量不守恒在同一个坐标系中,质点即使受到有心力的作用,对某个作用点角动量守恒,对另一个作用点也可能不守恒,因为此时合力矩不再为**0**.如果角动量守恒定律不满足伽利略变换的不变性,就应当从牛顿力学中独立出来,这样经典力学便由牛顿力学与角动量守恒定律共同组成,体系就比较复杂了.

㈡对于角动量守恒定律表述的重新思考

笔者认为,不具有单独协变性的命题不能称之为力学定律（或者力学定理）,作为力学定律（或者力学定理）必须具有普遍性,不能等同于一般的真命题,对于某一个确定的物理过程,在一个惯性系成立,在另一个惯性系也必须成立（在这里所说的成立不仅包括命题的条件成立,结论也必须成立,即具有单独的协变性.）.力学定律或者定理的推论可以不具有单独的协变性,在一个惯性系里条件和结论都成立,在其他惯性系里条件不再成立从而导致结论也不成立.显然经典的角动量守恒定律不能满足这个要求,而且在很多情况下质点受到的合力矩不等于 **0**,因此有必要重新表述角动量守恒定律,使其满足上述要求[97].在经典物理学中，理论的建立程序为：实验→方程→对称性，而爱因斯坦在狭义相对论的建立中倒转了这个程序：对称性→方程→实验，在广义相对论中，爱因斯坦把这个倒转过来的程序又应用于引力场方程的建立.另外，当把对称性的概念引入物理学中时，便可以把运动的相对性作为一种对称性来看待.在科学中"一种对称性的发现比一种特定现象的发现意义重大得多.像旋转不变性和洛伦兹不变性这样的时空对称性，统治着整个物理学."在创立狭义相对论时，爱因斯坦利用了洛仑兹(Hendrik Antoon Lorentz，1853—1928)变换的不变性，而在创立广义相对论时，他把变换不变性提升为物理学的普遍原理，并从引力质量与惯性质量等同这一经验事实出发，把某种变换不变性作为表示空间结构四维性和对称张量的引力方程的前提.洛伦兹说过："爱因斯坦把方法倒了过来,他不是从已知的方程组出发去证明协变性是存在的，而是把协变性应当存在这一点作为假设提出来，并且用它演绎出方程组应有的形式."

把角动量定理的两边同时积分可以得到**角动量定理的积分形式——质点对于某一点（或某轴）的角动量与该点受到的合力矩对于时间的积分之差不变.** 即 $\mathbf{L}(t)$ $\int_{t_0}^{t} M\mathrm{d}t$ $\mathbf{L}(t_0)$

该命题与角动量定理的微分形式是等价命题,显然具有伽利略变换的不变性,满足力学相对性原理,也具有单独的协变性.

力矩可以与角动量的方向相同,也可能相反,因此力矩既能质点的角动量的大小,也能改变角动量的方向,下面类比于机械能中势能的概念我们引入

定义：质点对于某一点（或某轴）受到的合力矩对于时间积分的相反数称之为角动量势.角动量势记为 N (t)=- $\int_{t_0}^{t} M\mathrm{d}t$

角动量守恒定律——质点对于某一点（或某轴）的角动量与角动量势可以相互转化,但是它们之和不变,并且对于不同的惯性系该守恒量相等, L (t)+ N (t)= L (t_0).

这样处理不但对于不同的惯性系都成立，而且对于同一个惯性系，质点对于所有点的角动量和角

动量势之和也是一个不变量，是对于经典的角动量守恒定律的一个推广，经典的角动量守恒定律不仅与坐标系有关，而且与坐标原点的选择有关.

朗道的力学中说：“如果系统整体相对参考系K′静止,则V是系统质心的速度,而μV是系统相对于参考系K的总动量P,进而有M=M+R×P.就是说,力学系统的角动量是由其相对静止的参考系中的“内禀角动量”和整体运动的角动量R×P构成.笔者认为朗道所指的整体运动的角动量就是角动量势，在这里多出一个物理量——角动量势，类似于在某参考系观察一个静止电荷，它只激发静电场，只需用标势ψ描述，但是变换到另一参考系时，电荷是运动的，除了电场之外还有磁场，必须用A和ψ描述.

在上面的命题中,当合力矩也等于 **0** 时,便是经典的角动量守恒定律,符合对应原理的要求,即经典的角动量守恒定律是上述命题的一个特例,经典的角动量守恒定律在运动系需要增加一个物理量——角动量势，对于固有参照系这一项正好为0.在地球绕日运动的椭圆轨道中,以太阳为参照系角动量守恒,以相对于太阳匀速运动的参照系看来角动量不守恒,但是角动量与角动量势之和守恒. 容易验证在上面的匀速圆周运动中,考察上述的命题显然满足伽利略变换的不变性.假设把单摆固定在地面上,在地面上有一辆匀速运动的小车,在小车系看来摆锤的角动量不守恒,但是角动量与角动量势之和守恒.这样角动量守恒定律不但与参考系无关(对于非惯性系考虑惯性力力矩即可)，而且与参考点无关.

角动量守恒定律与重力机械能守恒定律之间的类比——角动量类似于动能,角动量势类似于势能,动能和势能可以变化,但是机械能不变;同理对于不同的惯性系,角动量和角动量势可以变化,但是它们的和不变 (例如地球围绕太阳公转,以太阳为参考点,地球看做质点的话,受到的合力矩为 **0**,可是事实上地球并不是质点,其内部存在着其他力,因此地球的公转的角动量应该稍微减少,不过日—地轨道角动量是十分巨大的,相比之下地球的自转角动量十分渺小,不容易观察而已.).区别：对于不同的惯性系,机械能的守恒量不相同,但是角动量与角动量势之和的守恒量不变,因为它描述的是质点的旋转特性,**对于不同的惯性系,旋转特性相同.该旋转量对于不同的惯性系都成立,所以在狭义相对论框架内角动量守恒定律也是成立的.在一个物理过程中只要力矩为0,在同一个坐标系中只要对于一个参考点旋转量守恒,那么对于该坐标系中所有的参考点旋转量都守恒,在其它惯性系中的所有的参考点旋转量都守恒.**在物理学中,发现任何一个能概括许多现象的守恒量都是令人欣喜的事. “对称性原理”在上述研究工作中起着重大作用，它能使我们从事物之间的联系上考虑问题，从而使我们迅速抓住问题的实质.”

动量守恒定律和能量守恒定律以及角动量守恒定律一起成为现代物理学中的三大基本守恒定律.最初它们是牛顿定律的推论,但后来发现它们的适用范围远远广于牛顿定律,是比牛顿定律更基础的物理规律,是时空性质的反映.其中,动量守恒定律由空间平移不变性推出,能量守恒定律由时间平移不变性推出,而角动量守恒定律则由空间的旋转对称性推出;相互间有作用力的物体系称为系统,系统内的物体可以是两个、三个或者更多,解决实际问题时要根据需要和求解问题的方便程度,合理地选择系统.爱因斯坦讲：“物理学构成一种处在不断进化过程中的思想逻辑体系.”

22 力学相对性原理的适用范围

力学相对性原理仅仅涉及牛顿运动定律及其推论（动量定理与动量守恒定律、动能定理与功能原理（含机械能守恒定律）、角动量定理与角动量守恒定律、声波运动方程以及流体的欧拉方程、伯努利方程、兰姆型的理想流体运动方程、柯西-拉格朗日定理、兰姆霍兹方程等质点动力学规律），不涉及非牛顿定律的推论，例如非牛顿运动定律推论的胡克定律 $\boldsymbol{F}= -k\boldsymbol{X}$ 显然不具有伽利略变换的不变性.文献[22]没有认识到这一点，误认为 $\boldsymbol{F}= -k\boldsymbol{X}$ 也具有伽利略变换的不变性，得出弹力是显含时间的错误——“考虑到弹簧本身的动能忽略不计，对于小球和车厢壁而言，弹簧的唯一作用是以小球与其平衡点的距离为自变量按照胡克定律同时向小球和车厢壁提供相反的作用力，因此在地面和小车上可以分别用在相应的位形空间（x）和（x'）中假设车厢壁与小球之间存在服从胡克定律

$f'= f =-k\,(x'-x_o')=-k\,(x-x_o)$ （28）

（其中x_o和$x_o{}' =x_o-vt$分别为小球的平衡位置在地面和小车上的坐标）的有势力场取代弹簧实体的存在，从而系统可以被描述为质量为m的小球（质点）在车厢壁所提供的，遵从胡克定律式（28）的有势力场中运动.”**如果把胡克定律表示为弹力的大小与形变大小成正比，那么胡克定律适用于所有惯性系**，但此时形变大小不是位移，“其中x_o和$x_o{}'=x_o-vt$分别为小球的平衡位置在地面和小车上的坐标”就错了.由于力和距离是伽利略变换的不变量，而位移不是伽利略变换的不变量，因此需要正确理解胡克定律，区分位移和距离两个概念.两种表述方式并非始终等价，当观察者相对于弹簧的固定端静止时二者等价，笔者建议把胡克定律表述为“**弹力的大小与形变大小成正比”**较好，这样在所有的惯性系都成立了.

由于功不是伽利略变换的不变量，因此如果从经典力学的角度研究电场和磁场，可以发现电动势、电压和电势能也不具有伽利略变换的不变性，有些

文献从洛仑兹变换角度研究也得出不同参照系中感应电动势和电压的转换[68~69].文献[98]指出对于这些问题的处理必须依据伽利略变换，由牛顿定律导出的一切力学定律都具有伽利略变换的不变性.正如狄拉克所指出的："变换理论的作用日益增长，是理论物理学新方法的精华，它首先用在相对论中，后来又用在量子理论中.进一步前进的方向是使我们的方程在越来越广泛的变换中具有不变性."

23对相对性原理的再认识

文献[59]指出相对性原理可以分为两个层次.

第一个层次：从两个惯性系分别考察两个系统.由于牛顿定律对两个惯性系都成立，故在两个惯性系中所得到的一切力学规律(包括无条件的普遍规律和有条件的特殊规律)完全相同.由于是分别考察两个系统，故在两个惯性系中所得到的相同的规律之间，不存在"伽利略变换"这种联系.

第二个层次：从两个惯性系同时考察同一系统，由于牛顿定律对两个惯性系都成立，故在两个惯性系中所得到的普遍的(即不加条件由牛顿定律导出的)力学规律完全相同.由于是同时考察同一系统，故两个惯性系中所得到的相同的规律之间，必然存在着"伽利略变换"这种联系，即利用伽利略变换必能把 S 系中的规律变成要 S′系中的规律，反之亦然.

笔者认为，通常所说的力学相对性原理是指第二个层次的相对性原理，如果将伽利略变换换成洛仑兹变换，就是狭义相对论中的相对性原理，爱因斯坦本人有关狭义相对论的著述中的三段话便说明了这一点.爱因斯坦在回忆他建立相对论的经过时说，他"对于依靠已知事实通过创造性的努力来发现真实定律的可能性越来越感到绝望.""空间和时间并没有绝对的意义，它们不过是相对的关系罢了.""越发相信只有发现一个普遍的形式上的原理"才能得到"精确有效"的结果.他"直觉地感到"，"光速不变原理"和"相对性原理"正是这样的原理.

表述 A 自然界规律对于洛伦兹变换是协变的[70]

表述 B 如果 S 是惯性系，则相对于 S 作匀速运动而无转动的其它参考系 s' 也是惯性系，自然界规律对于所有惯性系都是相同的[71]

表述 C 自然规律同参照系的运动状态无关，至少在参照系没有加速运动时是这样[72]

笔者认为，爱因斯坦的表述B、C是指第一个层次的相对性原理，表述A是指洛伦兹变换下的第二个层次的相对性原理（麦克斯韦方程组满足洛伦兹变换，弹性介质中振动波传递方程满足类洛伦兹变换，只要把光速换成波速即可）."只有爱因斯坦真正认识到相对性原理的本质意义，并从根本上改变了矢量力学及其时空观"，相对性原理最初是力学的基本原理. 在广义相对论中基本物理规律在任何坐标系形式下都不变——广义协变原理.依照古典力学，物体在竖直引力场中的竖直加速度，同该物体的速度的水平分量无关.因此在这样的引力场里，一个力学体系或者它重心的竖直加速度的产生，同它内在的动能无关.这就是等效原理的内容：惯性质量同引力质量相等，在引力场中一切物体都具有同一加速度.这就意味着爱因斯坦在狭义相对论框架中构造引力场论的尝试被等效原理否决了.从等效原理中，可以得到这样的结论：在均匀的引力场中，一切运动都像在不存在引力场时对于一个均匀加速的坐标系所发生的一样.爱因斯坦在等效原理的启发下，认为如果我们要得到一种关于引力场的自然的理论，就需要把相对性原理推广到彼此相互作非匀速运动的坐标系上去，引力场方程将在非线性变换的情况下保持不变，这就是新的广义协变性原理.文献[73～75]对此进行了详细的分析.

爱因斯坦说自然界规律对于洛伦兹变换是协变的，由爱因斯坦作了序言的文献[76]中说过："力学定律在所有的惯性系(即对任一惯性系进行任意的伽利略变换而得到的所有坐标系)中采取相同的形式".由此如文献[76]说："伽利略相对论原理在数学上表现为矢量力学的基本方程在伽利略变换下是不变的或协变的.所谓协变性是指物理定律的表示形式不因坐标系的不同选择而有所改变."文献[77]说:"经典力学对伽利略变换来说是协变的".文献[78]说:力学运动方程具有伽利略变换的不变性.文献[79]认为机械能守恒定律不是一条基本的物理规律是完全错误的.爱因斯坦认为："必须承认经典力学在相当大的程度上是'真理'……因此，在力学的领域中应用相对性原理必然达到很高的准确度.一个具有如此广泛的普遍性的原理，在物理现象的一个领域中的有效性具有这样高的准确度，而在另一个领域中居然会无效，这从先验的观点来看是不大可能的."[80]

文献[101]分析了洛伦兹变换与伽利略变换之间的关系，为此下面先从狭义相对论的角度证明能量守恒定律的协变性[66]，牛顿力学只是狭义相对论在低速下的近似，说明在经典力学范围内能量守恒定律（机械能守恒定律）具有单独的协变性：

㈠ 功能原理的协变形式

在牛顿力学中功能原理的表述为：

$$F \cdot dr = dW \tag{1}$$

式中 F 是物体所受的作用力，dr 是物体在力 F 作用下发生的位移，dW 是物体受力作用发生位移而得到的能量的增量.式（1）表明，力对物体所做的功等于物体能量的增加.式（1）可写为：

$$\frac{F\cdot dr}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{i}{c}\frac{dW}{dt}d(ict)=0 \quad (2)$$

式中 v 是物体运动的速度，c 是真空中光速.利用四维力矢量和四维位移矢量表达式：

$$K_\mu=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(F,\frac{i}{c}\frac{dW}{dt}\right) \quad (\mu=1,2,3,4) \quad (3)$$

$$dx_\mu=[dr,d(i,c)] \quad (\mu=1,2,3,4) \quad (4)$$

则（2）式可写为: $K_\mu dx_\mu=0$ （$\mu=1,2,3,4$） （5）

式（5）显然是协变的.式（3）中的 W 是物体在相对论中的能量.可见，若把式（1）中物体的能量理解为相对论中的能量，则牛顿力学中的功能原理式（1）在相对论中就是协变的，其协变形式如式（5）所示.

㈡ 动能定理的协变形式

在牛顿力学中，若物体受力 F 作用而以速度 v 运动，则其动能 T 的增加率为 $F\cdot v=\frac{dT}{dt}$ （6）

若把式（6）中的 T 理解为相对论中的动能，则有：$T=W-m_0c^2$ （7）

式（7）中，W 是物体在相对论中的总能量，m_0 是物体的静能量，m_0c^2 是物体的静能量.对于一个确定的物体，其静能不随时间和坐标系而变，是一标量.因此有：

$$dT=dW \quad (8)$$

将式（8）代入（6）式可得：$\frac{F\cdot v}{1-v^2/c^2}+\frac{\frac{i}{c}\frac{dW}{dt}}{1-v^2/c^2}ic=0$ （9）

利用式（3）和四维速度矢量的表达式：

$$U_\mu=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(v,i,c) \quad (\mu=1,2,3,4) \quad (10)$$

则式（9）可写为 $K_\mu U_\mu=0$ （$\mu=1,2,3,4$） （11）

式（11）显然为协变的，所以若将式（6）中物体的动能理解为相对论中的动能，则牛顿力学中的动能定理式（6）在相对论中就是协变的，其协变形式如式（11）所示.

㈢ 动量定理的协变形式

牛顿力学中，力对物体的冲量等于物体动量的增量 dp，此关系即为动量定理：$F\cdot dt=dp$ （12）

将式（8）代入式（6）.则动能定理又可写为：$F\cdot vdt=dW$ （13）

利用时间延缓，可给出 τ 与固有时间之间的微分关系：$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ （14）

由式（14），（12）和（13）可分别写为： $$\frac{Fd\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=dp$$ （15）

$$\frac{\frac{i}{c}F\cdot vd\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=d\left(\frac{i}{c}W\right)$$ （16）

$$p_\mu=\left(p,\frac{i}{c}W\right)$$ （$\mu=1,2,3,4$） （17）

$$K_\mu=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(F,\frac{i}{c}F\cdot v\right)$$ （18）

则式（15）和（16）可合写为： $K_\mu d\tau=dp_\mu$（ $\mu=1,2,3,4$ ） （19）

式（19）是协变的，所以若将物体的动能和动量都视为相对论中的动能和动量，则牛顿力学中的动能定理式（13）和动量定理式（12）就都是协变的，其协变形式如式（9）所示.

㈣ 牛顿运动定律的协变形式

牛顿力学中，牛顿运动定律为： $$F=\frac{dp}{dt}$$ （20）

力 F 对物体所做的功率为： $$F\cdot v=\frac{dW}{dt}$$ （21）

由式（14），式（20）和（21）又可写为： $$\frac{F}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{dp}{d\tau}$$ （22）

$$\frac{\frac{i}{c}F\cdot vdt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{d\left(\frac{i}{c}W\right)}{d\tau}$$ （23）

由式（17）和（18），式（22）和（23）可合写为

$$K_\mu=\frac{dp_\mu}{d\tau}$$ （ $\mu=1,2,3,4$ ） （24）

式（24）正是相对论力学基本方程式，是协变的，所以若将式（20）和（21）中的动量和能量都视为相对论中的动量和能量，则牛顿力学中的牛顿运动定律式（20）和对物体所作的功的功率式（21）就都是协变的，其协变形式如式（24）所示.

㈤ 能量-动量守恒定律的协变形式

在牛顿力学中，能量、动量守恒定律分别为： $$\frac{dW}{dt}=0$$ （25）

$$\frac{dp}{dr}=0$$ （26）

由式（14），式（25）和（26）又可分别写为： $$\frac{d\left(\frac{i}{c}W\right)}{d\tau}=0$$ (27)

$$\frac{dp}{d\tau}=0 \tag{28}$$

利用式（17），式（27）和（28）可合写为：$\frac{dp_\mu}{dt}=0$ （$\mu=1,2,3,4$） （29）

式（19）是协变的.可见，若将式（25）和（26）中物体的能量和动量都视为相对论中的能量、动量，则牛顿力学中的能量、动量守恒定律式（25）和（26）就都是协变的，其协变形式如式（29）所示.

由式（20）和（21）可知，若式（25）和（26）成立，则 F=0，$F\cdot v=0$.所以

由式（18）可得：若式（25）和（26）成立，则必有:$K_\mu=0$ （$\mu=1,2,3,4$） （30）

式（30）即为能量-动量守恒定律式（29）成立的条件，该条件也是协变的.

最后用著名的理论物理学家、诺贝尔奖金获得者杨振宁的一段话结束这个问题的分析:“美的追求是科学发展的一个动力，美的鉴赏是作出科学抉择的一个重要条件，在美的探索中形成了科研的不同风格，今天我们比以往任何时候都没有理由容许我们放弃这个奇妙的信念.做科学研究是有所谓风格的，每一个人对于规律的美和妙的地方会有不同的感受，他对于一切现象、结论、结构就有偏好，这就发展出他的风格，这个风格影响到他将来研究工作课题的研究方向，影响到他将来研究问题的方法，所以风格有决定性的作用”.

Reference 参考文献:

1. 刘明成.机械能守恒定律遵从力学相对性原理.松辽学刊（自然科学版），2001（2）：28～30.
2. 熊秉衡.在不同惯性系中的机械能守恒定律[J]．物理通报，1964(6)：261～264．
3. 熊秉衡.“在不同惯性系中的机械能守恒定律”一文的更正与补充[J]．物理通报，1965(3)：116～117．
4. 陈美华，蒋毅.弹簧振子计及弹簧质量的误差分析.嘉应学院学报（自然科学版），2006（12）:27～30.
5. 高炳坤．能量追踪[J]．大学物理，2001（3）：15～16.
6. 高炳坤.力学中一个令人费解的问题[J].大学物理.1995（5）：20～24.
7. 蔡伯濂.关于讲授功和能的几个问题[J]. 工科物理教学，1981(1)，7～13．
8. 朱如曾.弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒——关于‘对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷’的商榷[J]．物理通报，2015(4)：100～103．
9. 郑永令.力学[M]（第二版）．高等教育出版社，2002 年：194．
10. 史玉昌.势能和机械能守恒定律[J]．大学物理，1988(7)：16～17.
11. 郑金.对一道物理竞赛题的两种互异解答的探讨[J]．物理通报，2015(7)：109～112．
12. 冉婷，余杰，兰小刚.惯性参照系的选择与机械能守恒.物理教学探讨，2017(9)：38～39．
13. 张翠.斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解．物理通报，2016(9)：115～117.
14. 吕宗禄.惯性力场和保守力场的等效性及其应用.工科物理增刊，2000:249～254.
15. 侯如松.惯性力是保守力吗.大学物理，1989（11）：47，27. 16 侯如松.惯性力是保守力吗？大学物理，1989（11）：47，27.
16. 徐水源.惯性力为保守力的物理条件.常石教育学院学报，2005（3）：63～65.
17. 马瑞芝.物体的位移与作用点的位移两个概念的区别.物理通报，1965（10）：469～471.
18. 孙后勤.物体的位移还是力作用点的位移——对功的定义中位移的理解.物理教学探讨，2011 年第 4 期（上半月）：35～36.
19. 刘明成，刘文芳，赵文桐.对“重力机械能守恒定律在各惯性系”的修正.物理通报，2017(12):111～113.
20. 李兴毅，陈健，赵佩章，赵文桐.伽利略变换的物理意义.河南师范大学学报（自然科学版），2002（2）：39～42.
21. 许忠诚.伯努力方程的使用条件.河池师专学报，1987 年第一期（理总第五期）：37～41.
22. 朱如曾.力场与时间有关系统的功能定理及其应用.大学物理，2016（10）：11～16.
23. 李卫平，罗洁.注意力的保守性和参照系的关系.中学物理，2013 年 3 月第 5 期：42～43.
24. 刘瑞金.机械能相关问题的讨论.淄博学院学报（自然科学与工程版），2001（12）：47～50.
25. 谢永珠，凌寅生.物理定律在惯性系间变换的不变性.物理教师，1999（7-8）：68～69.
26. 黄修林.浅谈伯努利方程中的压强能.大学物理，1995，14（3）：10～11.

27. 马忠义.物体在约束运动中的功和能.沈阳化工学院学报，1989（3）2：117～122.
28. 刘文芳，刘明成.关于功能原理之来源之探索.吉林师范大学学报（自然科学版），2007（2）：119～120.
29. 张建忠.对机械能守恒条件的讨论［J］.集宁师专学报，2006，28（4）：68～69.
30. 罗志娟，段永法，谢艳丁，何艳.关于功能原理的讨论.物理通报，2014（11）：106～107.
31. 袁书卿，万明理.关于质点系功能原理和机械能守恒定律相关问题的讨论.洛阳师范学院学报.2014（8）：50～53.
32. 苏云.功能原理的价值.韩山师范学院学报，32（6），2011（12）：46～48.
33. 谭昌炳.机械能定理和力学相对性原理.三峡大学学报（自然科学版），2005(2): 93～96.
34. 管靖.力学相对性原理与机械能.大学物理，1991（11）：21～24.
35. 张小溪.也谈力学相对性原理与机械能[J]. 怀化师专学报，1994，(13)1：112～114.
36. 张景春，韩淑梅.浅析物体系的势能[J]. 辽宁大学学报（自然科学版），1989(4)：33～36.
37. 张相武.力学体系保守力的判据和势能的计算.甘肃教育学院学报（自然科学版），第 14 卷第 1 期，2000（1）：24～27.
38. 党兴菊，张瑶，孙骏.势能概念的探讨.高师理科学刊，2015（12）:44～48.
39. 陆全民.关于功的定义问题.上海工程技术大学教育研究，2007（3）：46-47.
40. 高炳坤、谢铁曾.地球所受的一种易被忽视的惯性力.大学物理，1991（11）:46-47.
41. 朗道，粟弗席兹.力学[M].北京：高等教育出版社，1959:14.
42. 高炳坤.一个保守力做的功等于势能的减少吗[J].大学物理，2001，(20)5：19～20，30.
43. 白静江.两体问题中的功能原理及机械能守恒定律[J].大学物理，1997，(16)3：11～12.
44. 李学生，师教民.对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷[J]. 物理通报，2014(9)：119～120.
45. 刘明成，赵文桐，刘文芳.引力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]. 物理通报，2015(6)：123～124.
46. 鲁增贤，杨大伟，刘明成.相对性原理和协变性要求.吉林师范大学学报（自然科学版），82～83.
47. 朱如曾.相对性原理及其对自然界定律的协变性要求——机械能守恒定律协变性疑难的解答.大学物理.2000（2）：15～19，26.
48. 朱如曾.相对性原理对普遍定律和非普遍定律参考系变换性质的不同要求——关于协变性疑难的进一步讨论.大学物理，2002（3）：19～23.
49. 赵凯华.编者的话.大学物理，2002（3）：18.
50. 赵治华，史祥蓉.什么是保守力.工科物理，1997 年第一期：2～4.
51. 赵凯华.时空对称性与守恒律(上篇)——矢量力学.大学物理，2016（1）：1～3.
52. 赵文桐，刘文芳，刘明成.重力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]. 物理通报，2015(3)：96～98.
53. 刘明成，刘文芳，赵文桐.弹力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]. 物理通报，2015(12)：109～111.
54. 漆安慎，杜婵英.包景东修订. 力学[M]. 北京：高等教育出版社，2012 年：139.
55. 李力. 谈机械能守恒定律的正确表述[J]. 物理通报，2007(3)：21～22.
56. 王唐.对表述功能原理的一点思考.晋中师范高等师范专科学报，2003（9）：228～229.
57. 蔡伯濂.关于力学相对性原理与机械能守恒的来稿综述.大学物理，1994（1）：20～22.
58. 高炳坤.机械能守恒定律和相对性原理.大学物理，1999（1）：18～21，24.
59. 高炳坤.“机械能守恒定律是否遵从力学相对性原理”辨.大学物理，2000（2）：20～22.
60. 喀兴林.编者的话.大学物理，2000（2）：27～29，34.
61. 高炳坤.用伽利略变换审视矢量力学.大学物理，2010（6）： 1～3.
62. 储若超，张锐波.麦克斯韦滚摆运动规律的理论研究.物理通报，2017（11）：115～117.
63. 胡世巧、张务华、张凤云. 矢量力学的数学系统和力学相对性原理[J]. 河南师范大学学报（自然科学版），第 24 卷第 4 期，1996（11）：36～39.
64. Santos FC， Soares V and Tort AC. A note on the conservation of mechanical energy and the Galilean principle of relativity [J].European Journal of Physics. 2010，31(4):827～834.
65. 郑永令.流体流动状态与伯努利方程.大学物理，1994（8）：1～4.
66. 李子军，李根全，白旭芳.矢量力学形式和相对论力学的协变性. 大学物理，第 21 卷第 6 期，2002（60）: 22～23，39.
67. 刘一贯.关于机械能守恒定律的协变性，华南师范大学学报（自然科学版），1985（1）:155～157
68. 郝好山，李韶峰，张献图.不同参照系中感应电动势和电压的转换.河南教育学院学报 (自然科学版)，2001 年 3 月第 1 期: 35～36.

69. 谢朝阳.感应电动势和参照系的相对关系.湖南环境生物职业技术学院学报，2003，9（2）：146～148.
70. 爱因斯坦.相对论：相对论的本质[A].爱因斯坦文集[C]，北京：商务印馆，1976.455.
71. 爱因斯坦.相对论的意义[M].北京：科学出版社，1961.16.
72. 爱因斯坦.爱因斯坦文集 第二卷[M].北京：商务印书馆，1979:15.
73. 游阳明，石会萍，张春华，张建全，魏连甲，张学龙.物理规律（方程）的对称性、协变性、规范不变性.沧州师专学报，第 19 卷第 1 期，2003 年 3 月，33～38.
74. 韩锋.试论爱因斯坦的协变性原理.新疆大学学报（自然科学版），1985 年第 2 期，22～26.
75. 殷岳才.爱因斯坦与物理规律的协变性.现代物理知识，2000 年 S1: 42～44.
76. P·G·柏格曼.相对论引论[M].北京:人民教育出版社，1961:31.
77. 冯麟保，刘雪成，刘明成.广义相对论[M].长春:吉林科学技术出版社 ，1995:11.
78. 朗道 著 李俊峰，鞠国兴 译 力学（第 5 版）高等教育出版社，2010 年 7 月第 2 次印刷：5.
79. 徐恩生.机械能守恒定律的局限性.沈阳航空工业学院学报，2003(12)，第 20 卷第 4 期:73～74.
80. A. 爱因斯坦，狭义与广义相对论浅说[M]，上海科学技术出版社，杨润殷 译，1964：109～121、15～17、12～13.
81. 赵凯华、罗蔚茵，力学[M]，第二版，高等教育出版社，2004：①8、②85～86、③43.
82. 赵峥、刘文彪，广义相对论基础[M]，清华大学出版社，2012：10～13.
83. A. 爱因斯坦，爱因斯坦文集（第一卷）[M]，商务印书馆，许良英、范岱年编译，1976：619～624.
84. [美］HoltonG,张大卫译.物理科学的概念和理论导论.上册.第1版.北京:高等教育出版社,1983：338.
85. 王燕波，鲁祥珍.经典力学中功能关系.剑南文学（下半月）(经典教苑）学海纵横，2011（6）：281.
86. 张文英.用“作功与路径无关”定义保守力时一个值得注意的问题.广西物理，1994，第15卷第4期：22～24.
87. 龚劲涛.关于机械能守恒定律表述的再探讨.物理教师，2009（5），第30卷第5期：34～35.
88. 荣蟠作.谈机械能守恒定律的表述.物理教师，2007（5），第28卷第5期：15.
89. 程守洙，江之永．普通物理．第5版(第1册)．北京：高等教育出版社，1998．123.
90. 王建贵.转动参照系和机械能守恒.云南师范大学学报，1988（9），第8卷第3期：36～38.
91. 姜廷玺.机械波的多普勒效应浅析，工科物理（现名：物理与工程），1992（01）：16～17.
92. 王长龙，何向前.平面弹性谐波的伽利略变换.湖北民族学院学报（自然科学版），1998（6）：26～28.
93. 黄修林.浅谈伯努利方程中的压强能.大学物理，1995,14（3）：10～11.
94. 黄秋华.不同参照系中的伯努利方程.河池师专学报,1989年第三期（理总第十期）：:23～25，51.
95. 易双萍.不同惯性系中的力学规律.工科物理（现名：物理与工程），1998 年第 8 卷第 5 期：18～22.
96. 顾国锋.力学守恒定律的相对性，桂林市教育学院学报（综合版）.1995 年第三期：76～78.
97. 刘一贯.关于机械能守恒定律的协变性,华南师范大学学报（自然科学版）.1985（1）:155～157.
98. 陈克文.伽利略变换及其在力学教学中的处理，四川师范大学学报（自然科学版）.1991（12）第 14 卷第 5 期：76～80.
99. 伽利略.关于两种世界体系的对话.1632年.
100. Rankine WJM.On the general law of the transformation of energy [J]. Philosophical Magazine Series 4.1853，5(30):106～117.
101. 高顺泉.洛伦兹变换与伽利略变换之间的关系的研究.西安交通大学学报，1974年Z1期，59～66.
102. 贾利群，黄宏春.关于机械能守恒定律的讨论.平顶山师专学报（自然科学版），1998（4），第13卷第2期，22～27.
103. 郭福臣，王澜涛.用坐标变换推得多普勒效应.石家庄铁道学院学报，1991（09）：82～84.
104. 路峻岭，汪荣宝.多普勒效应公式的简便推导.大学物理，2005（08）：25～28.
105. 李清玉，吴文良.多普勒效应与相对性原理.昭通师专学报，1998（5）：144～146.
106. 李清玉，吴文良.多普勒效应与相对性原理.云南教育学院学报，1999（4）：59～60，64.
107. 黄海铭，杨俊涛.基于运动学基础知识的多普勒效应公式.物理通报，2015（06）：16～17.
108. 李云梅，余太会，蔡武德.匀速和变速运动时多普勒效应公式的推导.物理通报，2016（12）：82～84.
109. 王长龙，何向前.平面弹性谐波的伽利略变换.湖北民族学院学报（自然科学版），1998（6）：26～28.
110. 金东星，杨达中.麦克斯韦方程组的协变性.华

东工学院学报，1991（1）：77～90.
111. 黄亦斌，聂义友.均匀磁场中的转动道题和麦克斯韦方程组的协变性. 大学物理，2009（7）：20～22.
112. 邵继红，吴正中，唐旭东.麦克斯韦方程组的协变性与对称性.安徽师范学院学报（自然科学版），2001（11）：49～51.
113. 金东星.三维矢量形式的麦克斯韦方程组的协变性.南京理工大学学报，2003 年 12 月：724～727.
114. 臧永丽，周强.麦克斯韦方程组不变性的验证.青岛大学学报，2000 年 7 月：27～30.
115. 左秋霞.麦克斯韦方程组不变性的验证.淄博学院学报（自然科学与工程版），2001 年 3 月：39～41.
116. 戴结林.麦克斯韦方程组的协变性的另一种证明方法.安徽教育学院学报，2002 年 5 月：19～21.
117. 秦继民.时空变换与多普勒效应.广西师范大学学报（自然科学版），1991(12)第九卷第二期：85～89.
118. 冯胜奇.用洛伦兹变换推导多普勒效应的普遍公式.黄冈师专学报，1998（11），第 18 卷第 4 期：58～61.
119. 赵永泉.由相位不变原理讨论机械波的多普勒效应.大学物理，1995，14(3):43～44.
120. 王志成,康旭红,王增发.不同惯性参考系中系统机械能是否守恒的再讨论——兼谈机械能守恒定律满足伽利略相对性原理. 物理教师，2019（8）：60～62,64.

7/25/2020