35. 角动量定理满足力学相对性原理

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘 要：首先利用矢量法分析了角动量定理具有伽利略变换的不变性，并以匀速圆周运动为例验证了这个问题，验证了其满足力学相对性原理.

[李学生 (Li Xuesheng). 35. **角动量定理满足力学相对性原理.** *Academ Arena* 2017;9(15s): 149-150]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 35. doi:10.7537/marsaaj0915s1735.

关键词：矢量法；角动量定理；力学相对性原理

角动量对不同的参照系具有不同的值，所以角动量对伽利略变换不具有对称性；但角动量定理

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$$

对不同的惯性系具有相同的形式，所以角动量定理对伽利略变换具有对称性，为此首先用矢量法给出一般证明--------------

牛顿第二定律的最初形式为

F=m**dv**/dt=d**P**/dt --------------------- (1)

用质点在 0-xyz 坐标系的坐标矢量 **r** 从左边叉乘式（1）的两边就有

r×**F**= **r**×d**P**/dt，所以

r×d**P**/dt= d(**r**×**P**)/ dt= d**L**/dt，其中 M= **r**×**F**,**L**= **r**×**P.**

上式变为 M= d**L**/dt (2)

由于(1)满足力学相对性原理，我们有 **F**= d**P′**/dt （3）

用质点在 0′-x′y′z′坐标系的坐标矢量 **r′**从左边叉乘式（3）的两边就有

r′×**F**= **r′**×d**P′**/dt，所以 **r′**×d**P′**/dt= d(**r′**×**P′**)/ dt= d**L′**/dt，

上式变为 M′= d**L′**/dt， （4）

其中 M′= **r′**×**F**,**L′**= **r′**×**P′**.

（2）和（4）式对比，证明质点角动量定理满足力学相对性原理.文献[1]也给出了证明.

下面用实例验证角动量定理服从力学相对性原理

例 1 弹簧振子、自由落体和斜面上自由下滑的滑块

对于弹簧振子，角动量守恒：

$\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{u}t$，$\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{a}$，$m\boldsymbol{a}_1 \quad m\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{f}_1 \quad \boldsymbol{f}$.

$\boldsymbol{M} \quad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f} \quad (x \quad f\sin\pi)\boldsymbol{e} \quad \mathbf{0}$，

所以

$$\mathbf{0} \quad \boldsymbol{M} \quad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f} \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{x}\times m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t},$$

所以在地面上观察，角动量 $\boldsymbol{l} \quad \boldsymbol{x}\times m\boldsymbol{v}$ 守恒，角动量定理成立.

据伽利略变换知：

$\boldsymbol{M}_1 \quad \boldsymbol{x}_1\times\boldsymbol{f}_1 \quad (\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{u}t)\times\boldsymbol{f} \quad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f} \quad \boldsymbol{u}t\times\boldsymbol{f}$

$\mathbf{0} \quad [ut \quad f\sin(n\pi)]\boldsymbol{e}_u \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}$ (其中 $n \quad 0，1$)，

所以在小车上观察，角动量 $\boldsymbol{l}_1 \quad \boldsymbol{x}_1\times m\boldsymbol{v}_1$ 守恒，质点所受的合力矩为 0，角动量定理成立，角动量定理满足伽利略变换.

类似分析自由落体运动和从斜面自由下滑的滑块，由于位移和合外力共线，质点所受的合力矩为 **0**，角动量守恒，角动量定理成立，角动量定理满足伽利略变换.

例 2 匀速圆周运动

如下图，有一质量为 m 的小球（视为质点），在轻绳的牵制下，在光滑的地面上绕 O 点做匀速（速率为 v）圆周运动，如果忽略地面和空气摩擦阻力，

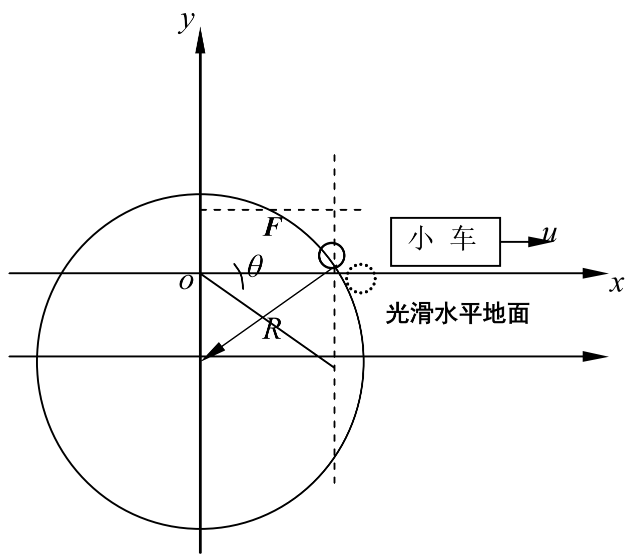

图 1 匀速圆动物体角动量定理成立问题

问：小球在地面系和沿 x 轴匀速运动的小车（设小车的速度为 u）坐标系(O_1-x_1y_1),角动量定理是否都成立？

解析：地球质量视为充分大，故稳定地保持为惯性系.

1、在地面系——设初相为 0，v=ωR,

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y=R\sin\omega t \\ x'=-R\omega\sin\omega t \\ y'=R\omega\cos\omega t \\ f_x=m\,x''=-mR\omega^2\cos\omega t \\ f_y=m\,y''=-mR\omega^2\sin\omega t \\ L=R\times f=\mathbf{0} \end{cases}$$

，质点对圆心的角动量大小为 $mR^2\omega$，方向不变，角动量定理成立.

2、小车系

将运动方程作伽利略变换，写出小车系运动方程：

$$\begin{cases} x_1=x-ut=R\cos\omega t-ut \\ y_1=y=R\sin\omega t \\ x'_1=x'-u=-R\omega\sin\omega t-u \\ y'_1=y'=R\omega\cos\omega t \\ \boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=(-mR\omega\sin\omega t-mu,\ mR\omega\cos\omega t,0) \end{cases}$$

$\boldsymbol{r}=(R\cos\omega t-ut,\ R\sin\omega t,0)$

$$\begin{cases} f_x=m\,x''=-mR\omega^2\cos\omega t \\ f_y=m\,y''=-mR\omega^2\sin\omega t \\ \boldsymbol{L_1}=\boldsymbol{r_1}\times\boldsymbol{p_1}=(0,0,\ mR^2\omega+umR\sin\omega t-utmR\omega\cos\omega t) \end{cases}$$

$\boldsymbol{L_1}'=(0,0,\ utmR\omega^2\sin\omega t)$

$M_1=\boldsymbol{r_1}\times\boldsymbol{f}=(0,0,\ utmR\omega^2\sin\omega t)$

角动量定理成立，角动量定理满足伽利略变换.

5/4/2017