34. 伯努利方程具有伽利略变换的不变性

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）
xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com
（山东大学物理学院，济南 250100）

摘要: 利用动能定理和机械能守恒定律重新推导了伯努利方程，说明了经典的伯努利方程仅仅适用于静止系，对于运动系必须利用一般形式的伯努利方程，经典的伯努利方程是其特例，推广后的伯努利方程满足伽利略变换.

[李学生 (Li Xuesheng). 34. **伯努利方程具有伽利略变换的不变性.** *Academ Arena* 2017;9(15s): 146-148]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 34. doi:10.7537/marsaaj0915s1734.

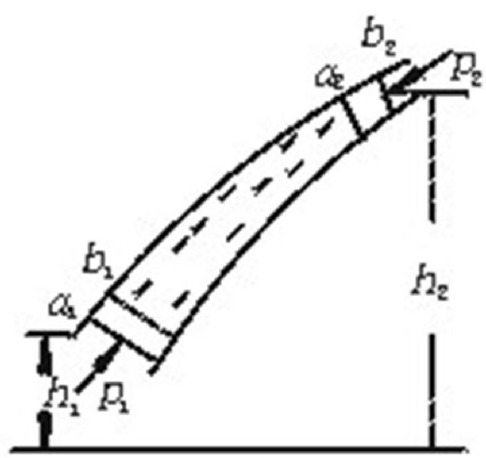
关键词: 伯努利方程；伽利略变换的不变性；推广；动能定理；机械能守恒定律

1726 年，伯努利通过无数次实验，发现了"边界层表面效应"：流体速度加快时，物体与流体接触的界面上的压力会减小，反之压力会增加．为纪念这位科学家的贡献，这一发现被称为"**伯努利效应**"．伯努利效应适用于包括气体在内的一切流体，是流体作稳定流动时的基本现象之一，反映出流体的压强与流速的关系，流速与压强的关系：流体的流速越大，压强越小；流体的流速越小，压强越大．1738 年出版的《流体力学》一书是他的代表著作．书中根据能量守恒定律解决了流体的流动理论，提出了著名的伯努利定理，这是流体力学的重要基本定理之一．丹尼尔在气体动力学方面的贡献，主要是用气体分子运动论解释了气体对容器壁的压力的由来．他认为，由于大量气体分子的高速规则运动造成了对器壁的压力，压缩气体产生较大的作用力是由于气体分子数增多，并且相互碰撞更加频繁所致．丹尼尔将级数理论运用于有关力学方面的研究之中，这对于力学发展具有重要的意义．

伯努利方程是能量方程式，说明在管内作稳定流动的理想液体具有压力能、势能和动能三种形式的能量，在适合限定条件的情况下，流场中的三种能量都可以相互转换，但其总和却保持不变，这三种能量统称为机械能．

1、对于地面系观察者

设在右图的细管中有理想流体在做定常流动，且流动方向从左向右，我们在管的 a_1 处和 a_2 处用横截面截出一段流体，即 a_1 处和 a_2 处之间的流体，作为研究对象．设 a_1 处的横截面积为 S_1，流速为 v_1，高度为 h_1；a_2 处的横截面积为 S_2，流速为 v_2，高度为 h_2．



如图所示，经过很短的时间 Δt，这段流体的左端 S_1 由 a_1 移到 b_1，右端 S_2 由 a_2 移到 b_2，两端移动的距离为 Δl_1 和 Δl_2，左端流入的流体体积为 $\Delta V_1 = S_1 \Delta l_1$，右端流出的体积为 $\Delta V_2 = S_2 \Delta l_2$．

∴$\Delta V_1=\Delta V_2=\Delta V$

左端的力对流体做的功为：

∵$W_1=F_1\Delta l_1$，$F_1=p_1\cdot S_1=$p

∴ $W_1=p_1S_1\Delta l_1=p_1\Delta V$

作用于右端的力 $F_2=p_2S_2$，它对流体做负功(因为右边对这段流体的作用力向左，而这段流体的位移向右)，所做的功为：

$W_2=-F_2\Delta l_2=-p_2S_2\Delta l_2=-p_2\Delta V$

∴两侧外力对研究液体所做的功为：

$W=W_1+W_2=(p_1-p_2)\Delta V$.

重力做功 $W_g=\rho g(h_1-h_2)\Delta V$

根据动能定理得 $W+W_g=(p_1-p_2)\Delta V+\rho g(h_1-h_2)\Delta V=\frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2-v_1^2)$

整理后得：$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2$

又 a_1 和 a_2 是在流体中任取的，所以上式可表述为：$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh$ ＝恒量，这就是经典的伯努利方程，式中的三项都具有压强的量纲．其中 $\frac{1}{2}\rho v^2$ 相与流速有关，常称为动压强；ρgh 是由于流体自身所在高度（相对零势面）所产生的压强，p 项与流速无关，常称为静压强．当流体水平流动时，或者高度的影响不显著时，伯努利方程可表达为 $p+\frac{1}{2}\rho v^2$ ＝常量.

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=C\text{（常数）}\qquad(1)$$

把上式两边同除以密度ρ，便可得到如下的方程

$$p/\rho+\frac{1}{2}v^2+gh=C'\text{（恒量）}\qquad(2)$$

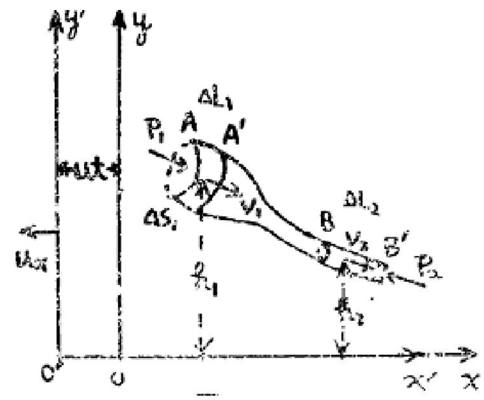
方程（2）可从能量的角度来理解，其物理意义是描述了单位质量的流体的压力能、动能和势能三者之和在同一流线上为一恒量，即说明同一流线上流体的能量守恒．使用伯努利定律必须符合以下假设，方可使用；如没完全符合以下假设，所求的解也是近似值．①定常流：在流动系统中，流体在任何一点之性质不随时间改变．②不可压缩流：密度为常数，在流体为气体适用于马赫数(M)<0．3．③无摩擦流：摩擦效应可忽略，忽略黏滞性效应． ④静止惯性参照系，一般指地面系．流体沿着流线流动：流体元素沿着流线而流动，流线间彼此是不相交的.

把上式两边同除以密度ρg，便可得到如下的方程

$$p/\rho g+\frac{1}{2}v^2/g+h=C''\text{（恒量）}\qquad(3)$$

该方程在水力学中广泛应用，第一项称为压力头，第二项称为流速头，第三项称为位置头，也称水头，因此该方程说明了同一流线上各点的压力头、流速头和位置头三者之和为一恒量.

2、对于小车系观察者



如上图所示，设 xoy 与 x′o′y′坐标系对应平行，且 x′o′y′系相对于静止系（地面系）xoy 以恒定速度 u 沿 x 轴的负方向运动，即 u=—u_x，u_y=0，u_z=0．对于 x′o′y′系，在稳定流动的理想流体中截取的细流管，由 AB 位置流到 A′B′位置的过程中，，重力不做功，外力做的功等于

$$\Delta W = W_1 - W_2 = p_1\Delta s_1(\Delta L_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_1}{v_1}t) - p_2\Delta s_2(\Delta L_2 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_2}{v_2}t)$$

重力机械能的增量为

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_2 - E_1\\ &= (E_{BB'} + E_{BA'}) - (E_{AA'} + E_{BA'})\\ &= E_{BB'} - E_{AA'}\\ &= (\frac{1}{2}mv_2^{\ 2} + mgh_2) - (\frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + mgh_1)\\ &= (\frac{1}{2}\rho\Delta L_2\Delta s_2 v_2^{\ 2} + \rho\Delta L_2\Delta s_2 gh_2) - (\frac{1}{2}\rho\Delta L_1\Delta s_1 v_1^{\ 2} + \rho\Delta L_1\Delta s_1 gh_1)\end{aligned}$$

由于流体是连续的，所以有 $\Delta L_2\Delta s_2 = \Delta L_1\Delta s_1$

所以

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}t}{v\Delta L} = 常数 \qquad （4）$$

上式为运动参考系伯努利方程的一般形式，当 u=0 时，两坐标系重合，（4）式便退化为（1），符合对应原理的要求．笔者建议将（4）称为伯努利方程，而经典的伯努利方程为其特例，显然修正后的伯努利方程具有伽利略变换的不变性——满足力学相对性原理，这样就不会出现文献[1]中的佯谬．

参考文献：

[1] 郑永令． 流体的运动状态与伯努利方程［J］．大学物理，1994，13（8）；1～4．

5/4/2017