33. 欧拉方程具有伽利略变换的不变性

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师，中国管理科学院学术委员会特约研究员，北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）
xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要 (Abstract): 物理学是科学的基本学科。本文章分析探讨了现代物理学的重要问题，**欧拉方程具有伽利略变换的不变性**，供参考。

[李学生 (Li Xuesheng). **33. 欧拉方程具有伽利略变换的不变性.** *Academ Arena* 2017;9(15s): 144-145]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 33. doi:10.7537/marsaaj0915s1733.

关键词 (Keywords): 质点；电荷；引力；电力；空间；方程；量子力学；**欧拉方程；伽利略变换**

在理想流体力学中动力学基本方程是欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+(\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v}=\mathrm{G}-\frac{1}{\rho}\nabla P\cdots\cdots(1)$$

或

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla \mathrm{v}^2-\mathrm{v}\times(\nabla\times\mathrm{v})=\mathrm{G}-\frac{1}{\rho}\nabla P$$

下面证明欧拉方程在惯性坐标系变换下的协变性：

在方程（1）中 **G**、ρ、P、t 是不变量，可直接变换为 **G**′、ρ′、P′、t′；**v** 变换为 **v**′+**u**．其中 **u** 是常矢，故

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\frac{\partial(\mathbf{v}'+\mathbf{u})}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'};$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\nabla(\mathbf{v}'+\mathbf{u})=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\nabla\mathbf{v}'$$

再考虑算符▽ $=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 的坐标变换，单位矢 **i**、**j**、**k** 都是不变量，可用 **i**′、**j**′、**k**′代入，y、z 用 y′、z′代入．但

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial(x-ut)}{\partial x}=(1-u\frac{\partial t}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x'},$$

当算符▽所作用场量为压强 P 时，t 与 x 可认为是独立坐标，从而 $\frac{\partial t}{\partial x}=0,\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'},\nabla P=\nabla' P'$

当算符▽作用于场量 **v** 时，t 与 x 是相关的，$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{dx}{dt}=v_x$，从而 $\frac{\partial}{\partial x}=(1-\frac{u}{v_x})\frac{\partial}{\partial x'}$

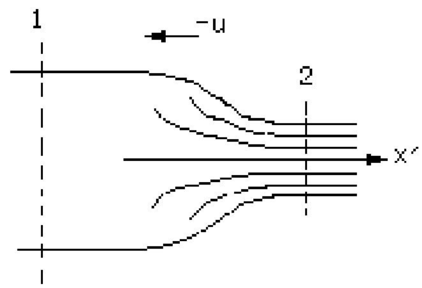
$$\therefore\nabla=(1-\frac{u}{v_x})\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'}+\mathbf{j}'\frac{\partial}{\partial y'}+\mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial z'}=\nabla'-\frac{u\mathbf{i}'}{v_x}\frac{\partial}{\partial x'}=\nabla'-\frac{u}{v_x'+u}\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'}\cdot \quad \text{-----（2）}$$

将（2）式代入

$$\mathbf{v}\cdot\nabla=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\nabla=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot(\nabla'-\frac{u}{v_x'+u}\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'})=\mathbf{v}'\cdot\nabla'+\mathbf{u}\cdot\nabla'-(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\frac{u\mathbf{i}}{v_x'+u}\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$=\mathbf{v}'\cdot\nabla'+\mathbf{u}\cdot\nabla'-u\frac{\partial}{\partial x'}=\mathbf{v}'\cdot\nabla'$$

欧拉方程最终变换为：$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'}+(\mathbf{v}'\cdot\nabla')\mathbf{v}'=\mathbf{G}'-\frac{1}{\rho'}\nabla'P'$．可见，欧拉方程在 x′系中的形式与在 x 系中形式完全相同．



图b

欧拉方程在惯性坐标系变换下协变是意料中的，因为欧拉方程是牛顿运动定律在流体力学中的表达，而牛顿运动定律对伽利略变换是协变的，故对欧拉方程自然也协变.

5/4/2017