

32. 声波的波动方程满足伽利略变换下的形式不变性

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授, 理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员, 中国民主同盟盟员 (作者为中国科学院高能物理所研究员)

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要: 简单地验证了声波的波动方程具有伽利略变换下的形式不变性。

[李学生 (Li Xuesheng). 32. 声波的波动方程满足伽利略变换下的形式不变性. *Academ Arena* 2017;9(15s): 141-143]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 32. doi:[10.7537/marsaai0915s1732](https://doi.org/10.7537/marsaai0915s1732).

关键词: 声波, 运动学方程, 波动方程, 伽利略变换不变性

波动方程给出了介质内体元的运动和受力的关系, 反映了波动传播的机制, 是波的动力学方程, 波的运动学方程是波动方程的解. 由于波动方程在推导过程中利用了牛顿第二定律, 因此应当满足伽利略变换. 声波波动方程是否具有伽利略变换下的形式不变性, 即声波的波动方程是否满足力学相对性原理的问题, 文献^[1]说: “其实不协变的定律很多, 例如:

例1 对于均匀各向同性介质, 如果介质是静止的, 则声波方程是

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 U(\mathbf{r}, t)$$

这里 U 为波动量, a 为声速. 容易验证此定律不具有伽利略变换下的形式不变性. ”

由于声波的运动方程由牛顿第二定律得出, 如果波动方程不满足伽利略变换, 说明经典力学存在着严重的问题, 因此研究这个问题意义比较重大.

下面我们假定媒质空气静止声源静止, 以一维波动方程为例证明声波的运动学方程和波动方程经伽利略变换形式不变, 望力学界的专家学者批评指正.

为简单起见, 设介质在惯性系 S 中静止, 波函数用 ψ 表示, 同时假定单频平面声波沿 x 轴正方向传播, 波速为 v , 频率为 f , 声源静止, 观测者 S' 向声源右方运动, 速度为 u , 则声波的运动学方程为

$$\text{在 } S \text{ 系 } \psi(x, t) = A \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (1)$$

在 S 坐标系, 波动方程为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2)$$

S 、 S' 两坐标系坐标变换关系为

$$\begin{cases} x = x' + ut' \\ t = t' \end{cases} \quad (3)$$

将 (3) 式代入 (1) 式, 可以得出在 S' 坐标系声波的运动学方程为

$$\begin{aligned} \psi'(x', t') &= A \cos 2\pi f \left(t' - \frac{x' + ut'}{v} \right) = A \cos 2\pi f \left[t' \left(1 - \frac{u}{v} \right) - \frac{x'}{v} \right] \\ &= A \cos 2\pi f \left(1 - \frac{u}{v} \right) \left(t' - \frac{x'}{v - u} \right) \end{aligned}$$

$$\text{令 } f' = f \left(1 - \frac{u}{v} \right), \quad v' = v - u, \quad \text{则有 } \psi'(x', t') = A \cos 2\pi f' \left(t' - \frac{x'}{v'} \right) \quad (4)$$

将 (4) 与 (1) 比较, 说明声波的运动学方程经伽利略变换后形式不变.

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t'^2} = -(2\pi f')^2 A \cos 2\pi f' \left(t' - \frac{x'}{v'} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} = -\frac{(2\pi f')^2}{v'^2} A \cos 2\pi f' \left(t' - \frac{x'}{v'} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t'^2} = v'^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} \quad (5)$$

有这两个式子我们便得到，比较 (2)、(5) 式，说明波动方程经伽利略变换后形式不变。由于机械波必须在媒质中传播，而波相对于媒质的速度是恒量，所以在多普勒效应中起作用的是波源及观察者相对于媒质的速度，而不是波源与观察者之间的相对速度^[2]，所以在这里声速不是不变量。但是在本题中由于我们假定波源相对于媒质不变，因此观察者相对于波源的速度等价于观察者相对于媒质的速度。

说明：1. 多普勒效应是坐标变换的结果^{[3] [4] [5]}， $f=f' \frac{(1-u/v)}{v}$ ，此即为波源静止，观察者远离波源方向运动时的多普勒效应；波源静止而观察者向着波源方向运动、观察者静止而波源远离观察者方向运动、观察者静止而波源向着观察者方向运动时的多普勒效应公式参见文献^[7]，根据本文的分析方法考察声波运动学方程和波动方程得出的结果一致——声波运动学方程和波动方程具有伽利略变换下的形式不变性，本文不再分析。

2. 在 S' 系我们只对波的运动学方程和波动方程进行坐标变换，不用管介质的问题，如果按照运动介质处理就错了，此时声波的运动学方程 (4) 的伽利略变换式是文献 [1] 的 (8) 式的结果部分，在一维情况下简化为

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial t'^2} - 2u \frac{\partial^2 U'}{\partial t' \partial x'} - (v^2 - u^2) \frac{\partial^2 U'}{\partial x'^2} = 0 \quad (6')$$

此式与 (4) 式明显不是同一形式！所以，声波方程不具有伽利略变换下的形式不变性！但是如文献 [1] (8) 式所示，它属于以介质平动速度 u 为参数的声波运动规律最小协变集，一维情况下为：

$$\left\{ \text{当介质平动速度为 } u \text{ 时，声波方程为 } \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2u \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} - (v^2 - u^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \right. \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial U'}{\partial t'} = -v' \frac{\partial U'}{\partial x'} \right\}$$

在单向波的特殊情况下成立

于是，(6') 式才能化为 (6) 式。这是对于伽利略变换的错误理解。类似的，研究机械能守恒定律满足伽利略变换时，场的坐标与质点的坐标不一样，不能混为一谈，重力、弹簧弹力和万有引力都是稳定场，不是显含时间的力场。

声波是大量声子时空相宇统计的结果，它的运动方程中的声速 a ，是随不同介质及其不同状态而不同，而与质点粒子的运动方程不同。特别是，类比光子按狭义相对论物体粒子运动质量的公式，其中的光速 c ，

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

改换为相应介质中的声速 a ，即其运动质量的表达式： m_0 是 $v=0$ 时的静止质量。因而声子的静止质量也为 0，是与质点粒子不同的粒子，其动量就需由其大量同种粒子统计得到的波长或频率和速度表达。其在介质中的速度是介质状态的函数，在标准状态空气中的速度= a_0 ，可由介质粒子运动波动方程的解表达，而且物体在介质中的运动速度，可能超过相应介质的声速 a ，而成为超声。本文在此从略，有兴趣的读者可以自己研究这个问题。

参考文献：

1. 朱如曾. 相对性原理及其对自然界定律的协变性的要求 [J]. 大学物理, 2000, 19 (2): 15~19, 26.
2. 姜廷玺. 机械波的多普勒效应浅析. 工科物理, 1992 (01): 16~17.
3. 郭福臣, 王澜涛. 用坐标变换推得多普勒效应. 石家庄铁道学院学报, 1991 (09): 82~84.
4. 路峻岭, 汪荣宝. 多普勒效应公式的简便推导. 大学物理, 2005 (08): 25~28.
5. 李清玉, 吴文良. 多普勒效应与相对性原理. 昭通师专学报, 1998 (5): 144~146.
6. 李清玉, 吴文良. 多普勒效应与相对性原理. 云南教育学院学报, 1999 (4): 59~60, 64.
7. 黄海铭, 杨俊涛. 基于运动学基础知识的多普勒效应公式. 物理通报, 2015 (06): 16~17.
8. 李云梅, 余太会, 蔡武德. 匀速和变速运动时多普勒效应公式的推导. 物理通报, 2016 (12): 82~84.

The Equation of Sound Wave Satisfied Covariance Requirement of Galileo

Li Xue-sheng

(School of Physics, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: it is simple to verify the wave equation of sound waves possessed Galilean covariance.

Key words: sound waves; kinematics equation; wave equation; Galileo transformation invariance

5/4/2017