

31. 机械能守恒定律是质点动力学规律 ——力学相对性原理与机械能守恒定律的关系研究综述

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授, 理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员, 中国民主同盟盟员 (作者为中国科学院高能物理所研究员)
xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要: 分析了在研究机械能守恒定律与力学相对性原理的关系时需要准确理解的十五个问题, 正是这些问题造成了长期的争论, 建议力学教材明确指明, 尤其是势能定义最基本, 根据势能定义推导惯性系中外势能的一般公式, 外势能不具有伽利略变换的不变性, 最后给出一个简要的一般性证明——机械能守恒定律满足力学相对性原理, 牛顿运动定律满足伽利略变换是机械能守恒定律满足伽利略变换的充分条件。

[李学生(Li Xuesheng). 31. 机械能守恒定律是质点动力学规律——力学相对性原理与机械能守恒定律的关系研究综述. *Academ Arena* 2017;9(15s): 131-140].(ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 31. doi:[10.7537/marsaaj0915s1731](https://doi.org/10.7537/marsaaj0915s1731).

关键词: 机械能守恒定律; 力学相对性原理; 势能公式; 势能定义; 质点动力学
中图分类号: O 313.1 **文献标识码:** A

相对性原理不是一个物理理论, 而是对于物理理论的一个要求, 是物理中的物理, 满足相对性原理是一个理论成立的必要条件. 满足能量守恒定律也是一个理论成立的必要条件, 违反能量守恒定律的观点一定是错误的. 相对性原理和能量守恒定律是物理学中的“宪法”, 其他“法律”(理论)必须表述为满足它的形式. 力学相对性原理是指任何惯性系在牛顿动力学规律面前都是平等的, 机械能守恒定律是动力学的普遍规律, 是牛顿运动定律的直接推论, 理应满足力学相对性原理^[1], 然而国内外力学教学界对于这个问题并没有取得一致的观点. 机械能守恒定律与力学相对性原理之间的关系是一个古老而又宽泛的问题, 至于从何时开始讨论, 不好查证, 文献[2~3]是笔者所能查到的国内最早文献. 下面就研究过程中出现的问题以及对于力学教学的启示简要总结如下, 期望得到力学教学界各位专家的指导, 力学教材最好明确指出这些问题, 丰富和完善经典力学的表述形式, 不要再使读者发生误解, 造成无休止的争论. 本文列举的实例均不考虑非保守力的因素.

1 力的作用点问题

力的大小、方向和作用点是力的三要素, 但是必须本质地看待力的作用点问题, 根据牛顿第二定律力必须作用在有质量的点上, 因此在研究弹簧振子和单摆问题时必须注意这个问题. 在弹簧振子中不能考虑弹簧质量 (如果考虑弹簧质量, 在各个惯性系机械能都不守恒, 就不是弹簧振子了, 弹簧振子中的弹簧与实验中的弹簧是有区别的, 实验中的弹簧由于具有质量同时具有动能和势能), 因此力的作用点是质点, 而不是弹簧.

我们可以把牛顿第二定律和欧姆定律进行类比, 合外力相当于电压, 质量相当于电阻, 加速度相当于电流. 导线抽取电阻、电感等属性后用电器的电压等于电源两端的电压一样. 类似于不考虑电阻的导线不能承担电压和消耗能量一样, 轻质弹簧不能单独承受力^[4], 也不能储存能量^[5], 千万不要认为弹簧振子中弹簧具有势能, 忽略动能. 不少人错误地认为力的作用点在弹簧, 才导致了这个问题争论了 30 多年^[6~10], 弹簧振子问题类似于重力场, 我们一般不把地球对于重力场的作用力和重力场对于质点的作用力看做两个力重复计算, 单摆问题中我们也不把悬挂点对于摆线的作用力和摆线对于摆锤的作用力看做两个力, 因为摆线也不考虑质量. 弹簧振子和单摆类似于质点(有质量无体积)是理想化模型, 不存在所谓的实体模型, 因为没有质量我们无法制作弹簧和摆线, 这是为了研究问题的需要, 抓住主要矛盾, 忽略次要因素造成的.

弹簧振子不是质点+弹簧, 而是质点受到线性恢复力. 在水平面上受稳定约束的弹簧振子运动模型, 实质上是一个与距离 r 成正比有心力作用下质点的运动问题 (质点动力学问题)^[11]. 现在不少教材没有注意强调这个问题, 甚至研究弹簧具有质量的弹簧振子问题, 有人误认为是弹簧具有质量, 不考虑质量, 但是具有弹力和内部结构, 内部的力与墙壁的作用力相平衡, 显然是错误的, 没有质量哪来的内部? 墙壁的作用力和内力除非始终是平衡力, 否则加速度会出现无穷大, 即使是平衡力各点都匀速运动, 这显然不符合现实. 在弹簧振子问题中约束反力和保守力是同一个力, 类似于匀速圆周运动中约束反力和保守力是同一个力. 不具

有质量的弹簧问题称为谐振子，是质点动力学问题，可以在大中学教材中提出，弹簧具有质量可以供专家研究。

关于功的定义曾经有两种说法——质点的位移与力的标量积、力的作用点的位移与力的标量积，如果考虑到力的作用点必须具有质量，二者是一致的，文献[6]也认可“功是质点的位移与力的标量积”。势能是用质点受到保守力的随体功定义的，对于没有质量的弹簧根本没有势能而言。建议教材一定说明，势能属于质点，有人担心势能为何不影响质量，其实动能对于质量的影响在经典力学中也是忽略的。

2 区分牛顿力学的势能和物理学中的势能概念

牛顿力学的机械能守恒定律中的势能对应于所有的有势力，包括主动力和约束反力，而物理学中的拉格朗日函数或哈密顿函数中的势能只对应于广义力，广义力只包含主动力，故两种势能不同。物理学中的哈密顿函数 H 的守恒原理，在非稳定的约束情况下， $H = T_2 - T_0 - V$ 并非机械能，成为广义的能量，只有在稳定的约束情况下， $H = T - V$ 才是机械能。故牛顿力学的机械能守恒定律要求有势能，而哈密顿函数的守恒原理要求 H 不显含 t 且为稳定约束，它们是从不同角度讨论机械能守恒的。物理学的广义能量守恒比牛顿力学的机械能守恒有着更广泛的意义。

由于牛顿力学的机械能守恒定律中的势能对应于所有的有势力，包括主动力和约束反力，因此物理学中的机械能守恒定律包括约束反力势能，不能仅仅考虑主动力。机械能守恒定律是质点动力学规律，在机械能守恒定律中的保守力是指质点受到保守力的合力，严格讲斜面和单摆问题中的机械能不是重力机械能问题，因为此时质点受到的合力不等于重力，不过在相对于斜面和单摆悬挂点静止的坐标系里计算的结果和重力机械能计算结果相同，因为另外一个保守力不做功^{[2-3][12]}（正因为如此很多人误认为是重力机械能问题），但是在相对于该坐标系匀速运动的坐标系里这个保守力做功，同时改变了质点的动能和势能，不改变质点的机械能。如果看做是重力机械能问题必须把另外一个保守力的做功去掉^[13]（即把这个力看做外力），否则就不满足力学相对性原理了。

3 势能的零点问题

根据力学相对性原理（或者说坐标系的观点），在计算势能时势能的零点应该相对于观察者不变（或者相对于坐标原点不变），而不是相对于力源不变，例如在一个相对于地面匀速上升的封闭的电梯内，一个观察者看到一个小球从电梯的顶端落下，碰到电梯底部后发生弹性碰撞，如果不考虑空气阻力等因素，理想状况下小球将不断运动下去，观察者看不到外面的情况，不知道小球距离地面的高度以及电梯相对于地面的速度，势能的零点只能相对于自己不变。只要建立了坐标系，势能零点便随之确定。一般情况下在一个惯性系里选择了势能零点，在另一个惯性系里最好用它的伽利略像点，并不是选择其他点不行，只要相对于观察者不变即可（或者说相对于坐标原点不变）。文献[14]由于不明白相对性原理（或者说坐标系的观点），用错了势能零点，才导致了势能显含时间的错误。

4 保守力的认识

设定 F 为在空间任意位置定义（或空间内单连通的区域）的矢量场，假若它满足以下三个等价的条件下任意一个条件，则可称此矢量场为保守矢量场：

① F 的旋度是零： $F \times \nabla = 0$ ；

② 假设粒子从某闭合路径 C 的某一位置，经过这闭合路径 C ，又回到原先位置，则力矢量 F 所做的机械功 W 等于零： $W = \int_C F \cdot dr = 0$ ；

③ 作用力 F 是某位势 Φ 的梯度： $F = -\nabla\Phi$ 。

① \Rightarrow ②：设定 C 为任意简单闭合路径，即初始位置与终结位置相同、不自交的路径。思考边界为 C 的任意曲面 S 。斯托克斯定理表明 $\int_S (\nabla \times F) \cdot da = \int_C F \cdot dr$ 。假设 F 的旋度等于零，方程左边为零，则机械功 W 是零，第二个条件是正确的。

② \Rightarrow ③：假设对于任意简单闭合路径 C ， F 所做的随体功 W 是零，则保守力所做于粒子的随体功，独立于路径的选择。设定函数 $\Phi(x) = -\int_o^x F \cdot dr$ ，其中， x 和 o 分别是特定的初始位置和空间内任意位置。根据微积分基本定理， $F(x) = -\nabla\Phi(x)$ 。所以第三个条件是正确的。

③ \Rightarrow ①：假设第三个条件是正确的。思考下述方程：

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla \Phi = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}\right)\hat{y} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}\right)\hat{z} = 0$$

所以第一个条件是正确的. 因此这三个条件彼此等价. 由于符合第二个条件就等于通过保守力的闭合路径要求, 所以只要满足上述三个条件的任何一条件, 施加于粒子的作用力就是保守力. 如果作用在物体的力所做之功仅与力作用点的起始位置和终了位置有关, 而与其作用点经过的路径无关, 即不仅力有势, 且在相应的势能表达式中不显含时间, 该力则为保守力. 势能显含时间本身就是一个伪命题.

大学力学里的保守力一般只提重力、弹簧弹力和万有引力, 其实有些弹力也是保守力, 例如斜面的支持力^[12~13]、摆线的拉力、匀速圆周运动的约束反力、静摩擦力^[15]、理想流体的压力、弹性碰撞中的弹力以及浮力等. 文献[16]验证了约束反力是一个保守力, 有的力学教材中有这样一个实例——在一个相对于地面匀速上升的电梯底部静止放置一个物体(视为质点), 在电梯内的观察者看来, 没有任何力对质点做功, 动能和势能(取电梯的底部为势能零点)均为0, 机械能守恒; 在地面的观察者看来, 电梯底部对于质点的支持力做功, 动能不变, 势能不断增加(取地面为势能零点), 机械能不守恒. 其实这种分析是错误的, 在地面系看来电梯的支持力也是一个保守力(很容易证明当电梯上升和下降相同的高度时, 支持力做功之和为0, 满足保守力定义.), 重力势能不断增加, 支持力势能不断减少, 质点受到的合力为0, 总势能不变, 因而机械能守恒, 机械能守恒定律满足伽利略变换. 重力机械能不守恒, 不代表机械能(力学能)不守恒.

5 保守力与有势力的关系

当质点运动时所受力系 \mathbf{F} 是位置和时间的单值连续函数, 我们称这部分空间为力场, 且可表为 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. 若 \mathbf{F} 中不显含 t , 则称为稳定力场; \mathbf{F} 显含 t 时称为瞬变力场. 若质点在空间各处所受场力 \mathbf{F} 都相同, 则称为均匀力场; 反之, \mathbf{F} 在空间各处都不相同时, 则称为非均匀力场. 例如万有引力场和弹性力场都是稳定场, 在地面附近的重力场 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ 便是均匀场, 而瞬变场的例子在电磁学和量子力学中是很容易见到的.

5.1 有势场的概念

当场力 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ 时, 若把时间 t 看作参数, 而场力 \mathbf{F} 的旋度 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ($\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ 除外) 得到满足, 则势能函数 V 存在, 且 $\mathbf{F} = -\nabla V$ 成立, 即 $V = V(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t)$.

我们把这样的力场称为有势场. 有势场是个无旋场. 若场力 \mathbf{F} 中显含 t 时, 这种有势场是非稳定的; 若场力 \mathbf{F} 中不显含 t 时, 这种有势场是稳定的. 对于非稳定的有势场而言, 等势面只具瞬时意义, 而计算场力

做功的公式 $W = \int_{p_1}^{p_2} \delta W = \int_{V_1}^{V_2} dV$ 不再成立, 因为积分时不能将参数 t 固定; 场力的元功为

$\delta W = -\nabla V \cdot d\mathbf{r} = -dV - \frac{\partial V}{\partial t} dt$, 即做功与路径有关. 这种非稳定的有势场不是保守场, 与它相关的势能函数 V 是时间 t 的显函数, 即 $V = V(\mathbf{r}, t)$. 一般说来, 具有势能函数的无旋场不一定是保守场, 它仅是有势场.

5.2 保守场的概念

当场力满足 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ 或 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$) (1)

时, 势能函数 $V = V(x, y, z)$ (2)

仅是位置的单值函数而不是速度和时间的函数, 符合这些条件的场力称为保守力, 这种场才是保守场. 仅仅满足条件式(1)的场力只能是有势力, 它不一定是保守力; 而只有同时满足式(1)和式(2)的场力才是保守力. 总之, 有势场是个无旋场, 它不一定是保守场; 保守场是个无旋场, 它一定是有势场. 可见有势场与保守场是有区别的.

6 惯性系与惯性力

惯性力是指: 当物体有加速度时, 物体具有的惯性会使物体有保持原有运动状态的倾向, 而此时若以该物体为参考系, 并在该参考系上建立坐标系, 看起来有一个方向相反的力作用在该物体上令该物体在坐标系内发生位移, 因此称之为惯性力. 因为在经典力学里惯性力实际上并不存在, 实际存在的只有原本将该物体加速的力, 因此惯性力又称为假想力. 这个概念的提出是因为在非惯性系中, 牛顿运动定律并不适用.

惯性系是指牛顿定律成立的坐标系, 在地面上做力学实验我们一般默认地面系是惯性系, 那么相对于地面匀速运动的小车系或者说电梯系都是惯性系, 惯性系里测量不到惯性力, 在这样的坐标系里利用惯性力解释问题都是错误的. 我们在默认地面系是惯性系的同时, 已经默认了地球的质量充分大, 忽略其能量的变化, 因此研究机械能守恒定律与力学相对性原理关系时两个惯性系都不应该考虑地球能量的变化. 我们不能研究

伽利略变换时，地面系和电梯系都是惯性系，考虑能量变化时都是非惯性系，前后必须做到自洽。现在世界上所有的仪器还达不到考虑由于地球的质量不是充分大导致的系统误差，仅仅太阳的阳光对于地球的能量影响也比实验中的质点对于地球的能量影响大得多，我们不能说为了一个实验让太阳不发光。质点的运动对于地球动能的影响远远小于地震、海啸、山川、河流、地铁以及汽车的运行等地面因素，也远远小于太阳的电磁辐射、太阳宇宙线、太阳风、行星际磁场、银河宇宙线、微流星体等外因素的影响。如果考虑这些因素，所有的力学教材都需要修改，问题就复杂了。由于我们不知道地球的具体质量，其实地球的质量是一个变量，宇宙中的星体尤其是太阳不断向地球辐射粒子，地球也向外辐射粒子，还有陨石等因素，这样将导致不可知论。

满足力学相对性原理即动力学规律满足伽利略变换，不研究非惯性系之间的变换规律，自由落体运动(其他类似)按照两体问题处理由于此时地面系和电梯系不是惯性系，与问题讨论无关。伽利略变换只研究惯性系，不研究近似惯性系，实验中是近似惯性系(可能有多方面因素的干扰)，理论计算中是严格惯性系。

在自由落体问题的研究中，不能仅仅把重力看作地球对于质点的万有引力在低空的近似，重力是万有引力与地球自转产生的惯性力的合力^[17]，研究机械能守恒定律与力学相对性原理的关系时，可以把重力和万有引力看作没有关系的两个力。万有引力可以地月系统或者卫星围绕地球运动(忽略空气阻力等非保守力因素)为例进行研究。在自由落体问题中若按照两体问题计算，地面系近似守恒，近似守恒不等于守恒，也是不守恒，因为质点除了受到重力外，还受到一个惯性力 $-m^2g/M$ ，尽管比较小，此时地面系只能是近似守恒(由于是理论推导，在这里不能取近似值；如果取近似值在电梯系也取近似值，惯性力对地球所作功率是 mgV_0 ，此时惯性力的功 mgV_0t 尽管比上面要大很多，但是相对于此时地球的动能而言依然是非常小的，显然也可以忽略(近似计算是按照忽略量在总值中的比例，不是按照忽略量的绝对值)，不能袒护一方，此时机械能也守恒，守恒值为地球的动能，因为质点的动能和势能相对于地球的动能而言极小。地面系与电梯系都不守恒，与力学相对性原理没有关系，不能说明机械能守恒定律不满足力学相对性原理。弹簧振子问题类似，不再说明。

对于普通的力学实验，以地球为惯性系，具有足够好的精确度，研究星体之间的作用力时不能视为惯性系。是否把地球视为惯性系，类似于何时把一个物体视为质点一样，应当根据研究问题的需要。

7 正确理解功能原理

现行的很多力学教科书的功能原理， $A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$ (3)

由于式(3)没有引入外势能，将机械能守恒定律成立的条件 $A_{\text{非保守力}} = 0$ (系统不受任何非保守力的作用)，搞错为 $A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = 0$ (外力和非保守内力都不做功)。

正确的功能原理应为 $A_{\text{非保守力}} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$ (4)

式(3)和式(4)的区别只在于引入外势能，即把所有保守力的功都移到等号右边，等号左边只剩下非保守力的功^[18]。式(4)还给出了势能和机械能的定义，给出的机械能守恒定律成立的条件为 $A_{\text{非保守力}} = 0$ 。因此建议把式(3)从力学教科书中删除，用式(4)代替它的位置(值得一提的是漆安慎的力学从2005年以后的版本就已经这样做了)，并改称式(4)为机械能定理，因式(4)确实是定理而非原理。

“势能属于系统”理论上没有错误，尤其是内势能问题(例如分子势能或者地月系统的引力势能)，但是当相互作用的两个物体质量相差极大——例如力学实验室中研究在自由落体问题，经过计算可知质点的运动对于地球能量的变化微乎其微，系统相对误差在 10^{-25} 至 10^{-26} 范围内，不仅远远小于空气阻力的影响，也小于重力加速度变化产生的误差，甚至小于狭义相对论效应，完全可以忽略，我们在地面系计算重力势能时忽略了地球能量的变化，在电梯系也必须忽略——量变引起了质变。“重力势能属于地球和物体”理论上没有错误，但是没有实际意义。现行力学教材中说：“重力势能属于物体是一种通俗的说法”表述错误，应该是一种精确度极高的表述，换句话说“物体由于被举高具有的能量叫重力势能，重力势能属于物体”可以认为完全正确。此时地面系和相对于地面匀速运动的坐标系都按照惯性系对待，地球质量视为充分大，外势能只研究质点就可以，例如研究自由落体运动，在电梯系不用管地球。文献[14]由于没有正确理解外势能，外场计算的势能依然是内势能。

8 内势能与外势能的关系

现在不少人对于势能理解为：势能是储存于一个系统内的能量，也可以释放或者转化为其他形式的能量。势能是状态量，又称作位能。势能不是属于单独物体所具有的，而是相互作用的物体所共有。这种观点对于内势能是正确的，对于外势能不成立。参照系的匀速运动同时改变两个质点的势能，但是它们的总势能没有变化。不能把它当做势能的定义，例如一个物体被悬挂起来，与地面比较相对位置发生了变化，但是物体不具有做功的能力，因此也不应该说具有势能。

笔者建议力学教材明确写明，不要让读者误解。其实现所有力学教材对于势能的最初定义都是外势能，在自由落体运动、单摆、斜面、引力场、弹簧振子等问题推导机械能守恒都是利用外势能计算，仍然有不少人排斥外势能的存在，例如文献[19~20]。还有人认为外势能的定义有问题^[48]。

关于内势能的机械能守恒定律满足力学相对性原理力学界是取得共识的^[9]，外势能的机械能守恒定律也满足力学相对性原理^[21]，不过此时势能与观察者有关^[22]，动能也与观察者有关，对于不同惯性系中的观察者机械能（力学能）都是守恒的，只不过守恒量不相同。在研究机械能守恒定律与力学相对性原理之间的关系一定注意要么都按照内势能计算，要么都按照外势能计算，惯性系选取时前者必须以系统的质心为参照系，后者以质量相对极大的物体为参照系，一定做到自洽。至于在实际问题中选择内势能还是外势能计算，根据研究问题精度的要求进行。

	保守力的功和势能的关系	势能所有者	势能函数关系	坐标系变换与势能的关系	适用范围	惯性系的选取	二者之间的关系
内势能 (内场处理)	一对保守力的功等于势能的减少，需要两个位形坐标表示	势能属于系统——两个质点。	势能是相对位置的函数	势能是伽利略变换的不变量	适用于所有情形	以系统的质心为参照系	外势能是内势能的极限情况，内势能可以看作两个质点的外势能。
外势能 (外场处理)	一个保守力的功等于势能的减少，只需一个位形坐标表示(实际是忽略另一个保守力的功)	势能属于质点	势能是坐标的函数	势能不是伽利略变换的不变量， $E'_p = E_p + mv \cdot u$ ^[23]	适用于质量相差悬殊的质点，例如重力势能	以大质量物体为参照系。	

9 正确理解势能是位置的函数

以弹簧振子为例，在小车系对任一点 x_1 ，尽管不同时刻场的强度是变化的，我们设力用 $F(x_1, t)$ 表示，

$$\int_{x_1}^{x_1} F(x_1, t) dx'$$

不同时刻保守力做的功为 W ，则 $W = \int_{x_1}^{x_1} F(x_1, t) dx'$ ，根据势能的定义，该点的势能不变，因此势能是位置的函数，所以势能具有相对性。速度是相对的，所以动能也是相对的。实际机械能也是相对的，两坐标

系“守恒量”不相等， $E' = E + \frac{1}{2} mu^2$ 。文献[23]指出系统的机械能可以表示为本质不同的两项之和：依赖于速度的动能和仅仅依赖于质点坐标的势能。

10 势能定义与势能公式之间的关系

纵观 50 多年来关于机械能守恒定律与力学相对性原理关系的讨论可以发现，在弹力、重力和引力机械能问题根据势能定义求解的是满足力学相对性原理，根据经典势能公式求解的不满足力学相对性原理。由于势能本质是用保守力的功定义的，而保守力的元功是坐标函数的全微分、可积分的，积分值为末态始态之差与积分路径无关，因此外势能也具有相对性。在经典力学教材中我们一般都是根据势能定义推导势能公式的，因此势能定义比公式更基本，以弹性势能为例(重力势能和引力势能也存在类似问题，本文不再说明)， $E_p(t)$

$\frac{1}{2} kx^2 + m\omega A \sin(\omega t) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + m\omega A \sin(\omega t) = \frac{1}{2} kx^2 + mv \cdot u$ ^[27]应该是弹簧振子中弹性势能的一般公式，没有否定经典的弹性势能公式，原来的公式只是一个特例——观察者在弹簧弹力方向上分速度为 0 ，不能认为弹性势能对于所有的观察者都相同，需要根据“物体的势能增加量等于物体克服保守力做的功”重新计算(万

有引力势能 $E_p = \frac{mGM}{r} + mv \cdot u$ ，重力势能类似 $E_p = mgh + mv \cdot u$)。

对于外势能而言， $E_p = \frac{1}{2} kx^2$ ， $E_p = \frac{mGM}{r}$ 和 $E_p = mgh$ 仅仅适用于观察者在保守力方向上的分速度始终为 0 时的情形，当观察者在力的方向上分速度不相等时，计算保守力做的功不相等，因此势能差也应该不相等，这说明势能一样具有相对性，这是经典力学在公理化的过程中向前迈进的一小步。现在不少的力学教材没有指明这一点，认为势能差是绝对的，与观察者无关^[10]。

经典的势能公式对于内势能成立——内势能具有伽利略变换的不变性。不少人认为经典的势能公式适用于所有的惯性系，在功能原理中排斥外势能的存在，认为都是内势能，但此时需要牺牲一些经典的结论，例如研究自由落体运动地面系就不是惯性系了，机械能也不守恒，而且不具有可操作性，譬如我们根本不知道

地球的质量等，其他实例也存在这个问题。

11 注意区分力学相对性原理和狭义相对论性原理

11.1 力学相对性原理与狭义相对性原理的区别

经典物理学仅采用三维空间坐标系，时间只是空间坐标函数的参量，而与坐标系无关，即：所谓“绝对时间”。坐标系牵引运动的位移矢量和速度矢量的变换就都是伽利略变换。但是，坐标系牵引运动位移矢量的变换，也会随时空而变，即：产生时空弯曲。不能继续使用不变的坐标系。例如：在地球观测太阳系其它行星的进动角。坐标系惯性牵引运动也是速度矢量的变换，也不会随时空而变，即不产生时空弯曲，而能继续使用不变的坐标系，原坐标系中任意矢量与牵引运动矢量本身变换结果的不同。

按照一般理解，相对性原理对物理方程所提出的要求(或所加的限制)就是协变性要求(限制)。力学相对性原理要求力学定律对于伽利略变换是协变的，即经伽利略变换形式不变。狭义相对性原理要求物理定律对于洛伦兹变换是协变的，即经洛伦兹变换形式不变。因此可以说相对性原理就是协变性要求。若某定律服从相对性原理就说它满足协变性要求。机械能守恒定律满足伽利略协变性不满足洛伦兹协变性，或者说它满足力学相对性原理不满足狭义相对性原理。从历史上看，把相对性原理简称为协变性要求是从狭义相对论开始的。后来人们干脆把相对性原理称为协变性原理。^[24]赵凯华的书中写到：

用现代的术语来概括，伽利略相对性原理可表示为：

一个对于惯性系做匀速直线运动的其他参照系，其内部发生的一切物理过程，都不受到系统作为整体的匀速直线运动的影响。或者说，不可能在惯性系内部进行任何物理实验来确定该系统做匀速直线运动的速度。

既然相对于惯性系做匀速直线运动的系统内遵从同样的物理规律，由此可得出结论：相对于一惯性系做匀速直线运动的一切参照系都是惯性系。亦即，对于物理学规律来说，一切惯性系都是等价的。

爱因斯坦要求“相对时空”里的“相对性原理”是无特殊参考系的，所以“洛伦兹变换”无特殊参考系。而“绝对时空”里同样有“运动规律在所有参考系里都有相同的形式”、“物理规律的公式形式与坐标系无关”的规律，所以“绝对时空”里同样有“（伽利略）相对性原理”，无特殊参考系的“伽利略变换”是其数学形式。

“绝对时空”里的力学、电磁学等一切公式形式只有满足“伽利略变换”才能在“绝对时空”里自洽，这从另一方面证明“伽利略变换”就是“绝对时空”里无特殊参考系的“（伽利略）相对性原理”的数学形式。因此，“绝对时空”与“相对时空”里都有各自对应的“相对性原理”，它们都是各自时空里的“运动规律在所有参考系里都有相同的形式”、“物理规律的公式形式与坐标系无关”理论，只是各自对应的数学形式不一样；所以两个时空有本质的区别。

力学相对性原理是对于绝对时空而言，此时观察者运动而力场不变，即力是伽利略变换的不变量，力的坐标不能随着观察者的运动而变化，这一点与狭义相对论中的相对性原理不同，不能简单把伽利略变换看成洛伦兹变换的极限情况，量变引起质变，否则可能把不显含时间的力变成显含时间的力，从而力就不是伽利略变换的不变量（例如当把弹簧固定在墙上时，在小车系看来不考虑墙的运动。）。

11.2 力的保守性具有伽利略变换的不变性

势能是用保守力的随体功之和定义，不能利用等时积分计算，此时力就不是伽利略变换的不变量。文献[7]的计算方法是完全错误的。文献[25]也是由于没有正确区分伽利略变换和洛伦兹变换，质点成了在相对时空里运动，利用等时积分得出了“弹性力在惯性系 S 中为保守力，在惯性系 S'系却不是保守力，因而在惯性系 S 中可以引入势能，而在 S'系却不能引入势能。”绝对时空观就是时间和空间没有关系，两个惯性系时间相同，空间不变——场的坐标不变。既然不能引入势能，那是何种形式的能量？此时力还是伽利略变换的不变量吗？文献[26]和[47]指出如果力的保守性可随参照系而变，那么在不同的惯性系中做关于某力的保守性的物理实验，可根据该力在一惯性系中做功是否与路径有关，从而判断该惯性系相对施加该力的作为另一惯性系的物体是否在运动——这是相对性原理不能允许的。前面已经证明判断保守力的一个充要条件是 F 的旋度是零： $F \times \nabla = 0$ ，而旋度是伽利略变换的不变量，所以力的保守性具有伽利略变换的不变性。当把斜面固定在地面上时，在地面系看来，由于斜面的支持力始终不做功，因此小滑块在斜面上运动回到出发点时支持力做功始终等于 0，因此在地面系看来支持力是一个保守力，又因为重力也是一个保守力，因此它们的合力也是一个保守力。由于力是一个伽利略变换的不变量，因此在小车系看来滑块受到的合力也是一个保守力。

保守力是有势力的一种——不显含时间，力是伽利略变换的不变量，包括力场的性质不变，在一个惯性系中某个力不显含时间，在另外的惯性系中也一定不显含时间，例如在自由落体问题中匀速上升的电梯系中我们不能计算势能时重力是显含时间的力，利用动能定理求动能时重力不是显含时间的力，前后不自洽。用

对称性原理表述为，由势能对时间平移的不变性，就必有能量的守恒性（例如重力随时间的可变性，在重力较弱时把水提升到蓄水池中去，所做的功较少；在重力变强时把蓄水池中的水泄放出来，利用水力发电，释放出较多的能量。这是典型的第一类永动机）。

在伽利略变换中场坐标不变而质点的坐标变化，场或者说力的坐标与质点的坐标不一样，运动质点（小球）的坐标随时间变化，不是场力 F 随时间变化，重力、弹簧弹力和万有引力等都是稳定场，不是显含时间的力场。在机械能定理中可以有显含时间的力（非保守力），在机械能守恒定律中不能有显含时间的力。由于牛顿力学适用于绝对时空，因此场或者力的坐标必须是相对于力源静止坐标系里的坐标（因此力是伽利略变换的不变量包括力场的性质不变），质点坐标是观察者坐标系里的坐标，这一点和相对论不同，在相对论中场的坐标和质点坐标都是观察者坐标系里的坐标，伽利略变换和洛伦兹变换在这一点上是有区别的，不能仅仅看做是洛伦兹变换的低速近似，伽利略变换只研究质点坐标，不研究场（或者力）的坐标。朗道的书《力学》中说，在惯性参考系中自由运动的质点，由于时间和空间的均匀性和各向同性，表征它所用的拉格朗日函数不显含时间和广义坐标和速度的方向。

12 分清主要因素与次要因素之间的关系

在实验过程中，影响实验结果的因素有很多，我们必须抓住主要矛盾，以自由落体运动为例说明。在实验过程中存在空气阻力，不仅在竖直方向存在，而且在水平方向空气的流动对于实验的结果都有影响，而且影响结果并非极小，由于自转的影响，落体还有微弱的偏东现象，电梯的顶端和底端重力加速度还有微弱的变化，实验室周围汽车的行驶等都对于实验的结果存在变化，但是我们在这里仅仅是理论分析，忽略这些因素，有些因素影响极小我们根本测量不出来。在其他实验中也存在类似问题，例如无质量的弹簧我们根本做不出来，单摆的摆线不可能没有质量，也并不是绝对不能伸长。上面谈及的这些因素显然远远大于实验过程中对于地球能量的变化对于实验结果的影响，所以在分析过程中也应该忽略这些影响，这是理想化模型，无论是地面系还是电梯系（或者小车系）看做严格的惯性系，不能看做两体问题，按照非惯性系处理。根据唯物辩证法的观点我们应该抓主要矛盾，不能甲做自由落体实验地面系是非惯性系，乙做弹簧振子实验地面系是惯性系。当初牛顿也是在忽略这些次要因素的前提下建立经典力学体系的，今天我们仍然可以忽略这些次要因素。在非惯性系中研究机械能守恒问题与力学相对性原理无关，力学相对性原理仅仅针对惯性系而言。笔者建议力学教材明确指明，对于自由落体运动、单摆、弹簧振子等这样简单的力学实验，地球的质量视为充分大，稳定地保持为惯性系，因为系统误差我们根本测量不出来。

13 封闭系统、开放系统和相对性原理

所谓“封闭系统”就应是：仅由某些彼此相互作用不可忽略的各粒子组成的系统。在任何封闭系统内，经典物理学的相对性原理都成立，能量、动量也都守恒。有人认为封闭系统内变换后，能量、动量就不守恒，就是弄错了变换的概念和计算。如果再加上封闭系统外的粒子与其内各粒子不可忽略的相互作用，当然该封闭系统的能量、动量就不守恒。但是以上经典物理学的相对性原理都仍然成立，相对性原理对于开放系统和封闭系统都成立。有人认为相对性原理也不成立，就也是弄错了变换的概念和计算。例如对于“一个在地面附近自由下落的质点相对地面是封闭系统。在相对于地面匀速上升的电梯中观察者看来，应该仍然被视为是那个封闭系统”。因为这种情况只是经相对于地面匀速上升电梯的一个惯性牵引运动的变换后，从地面的参考系(坐标系)变换到了电梯的参考系(坐标系)，并未加入封闭系统外的任何粒子与其内各粒子不可忽略的相互作用，当然该系统的能量、动量等等都仍然守恒！

系统的开放与封闭具有相对性，以自由落体运动为例，按照内场计算是开放系统（考虑地球能量的变化），按照外场计算是封闭系统（忽略地球能量的变化）。按照外场计算，若只考虑质点的动能，则为开放系统——重力场对质点做功；若考虑质点的机械能，则为封闭系统。考虑了质点的势能，就不能考虑保守力的功。再例如固定在地面的斜面上自由下滑的滑块，若按照重力机械能计算，则为开放系统（在小车系看来斜面支持力做功）；若按照机械能守恒计算则为封闭系统。单摆问题类似，不再说明。

14 简要证明与主要结论

文献[13]证明了在自由落体运动和斜面问题中机械能守恒定律满足伽利略变换，文献[27~28]说明弹性势能机械能守恒定律满足伽利略变换，文献[29]论证了在引力机械能守恒定律满足伽利略变换。机械能守恒定律成立的条件其实非常简单——只有保守力做功，这一点其实早已经取得了共识的，后来由于出现了这一场跨世纪的争论，才导致了多种描述，对于这个内容可以参考文献[29~33]。在这里不用区分内力和外力，这是质点动力学问题，对于质点而言都是外力。

现在力学教材中的功能原理是错误的，文献[28]已经指明这个问题，这里不再说明。下面给出一个一般的证明——

根据动能定理, 设质点仅仅受到保守力的作用, 保守力的合力做的功为 W , $W = E_{k1} - E_{k0}$, E_{k1} 是 t_1 时刻的动能, E_{k0} 是 t_0 时刻的动能. 根据势能的定义, $W = E_{p0} - E_{p1}$, E_{p1} 是 t_1 时刻的势能, E_{p0} 是 t_0 时刻的势能. 所以 $E_{k1} - E_{k0} = E_{p0} - E_{p1}$, 所以 $E_{k1} - E_{p1} = E_{k0} - E_{p0}$.

机械能守恒定律成立, 满足伽利略变换. 文献[34~41]的结论是完全错误的.

牛顿定律满足伽利略变换是动能定理满足伽利略变换的充分条件, 动能定理满足伽利略变换是机械能守恒定律满足伽利略变换的充分条件, 即牛顿定律满足伽利略变换是机械能守恒定律满足伽利略变换的充分条件. [20] [42] 由于动能定理是标量方程, 与牛顿第二定律并不等价, 因此我们得不出必要条件. 说得更本质一些, 由于机械能守恒定律只与质点所受到保守力的合力有关系, 而力是伽利略变换的不变量, 所以机械能守恒定律满足力学相对性原理. 无论内势能还是外势能, 都满足力学相对性原理, 注意前后必须自洽, 即两个惯性系必须利用同一种方法. 爱因斯坦认为: “普遍的自然规律是由那些对一切坐标系都有效的方程表示的. 更简单的理论, 涵盖更多不同的内容, 具有广阔的应用, 这才是令人信服的理论.” 在经典力学范围内机械能守恒定律是普遍规律. 这个问题在国际上也比较纠结[43]. 机械能守恒定律是机械能对于时间的平移不变性的结果, 对于这个问题的讨论文献非常多, 本文不再讨论.

机械能守恒定律应该表述为满足力学相对性原理的形式[44], 这样牛顿力学体系内部才能保证统一和和谐.

15 力学相对性原理的适用范围

力学相对性原理仅仅涉及牛顿运动定律及其推论(动量定理与动量守恒定律、动能定理与功能原理(含机械能守恒定律)、角动量定理与角动量守恒定律、声波运动方程[45]、流体的欧拉方程等质点动力学规律), 不涉及运动学规律等非牛顿定律的推论, 例如非牛顿运动定律推论的胡克定律 $F = -kX$ 显然不具有伽利略变换的不变性. 文献[14]没有认识到这一点, 误认为胡克定律也具有伽利略变换的不变性, 得出弹力是显含时间的错误——“考虑到弹簧本身的动能忽略不计, 对于小球和车厢壁而言, 弹簧的唯一作用是以小球与其平衡点的距离为自变量按照胡克定律同时向小球和车厢壁提供相反的作用力, 因此在地面和小车上可以分别用在相应的位形空间 (x) 和 (x') 中假设车厢壁与小球之间存在服从胡克定律

$$f = f' = -k(x' - x_0') = -k(x - x_0) \quad (22)$$

(其中 x_0 和 $x_0' = x_0 - vt$ 分别为小球的平衡位置在地面和小车上的坐标) 的有势力场取代弹簧实体的存在, 从而系统可以被描述为质量为 m 的小球(质点)在车厢壁所提供的, 遵从胡克定律式(22)的有势力场中运动.” 如果把胡克定律表示为弹力的大小与形变大小成正比, 那么胡克定律适用于所有惯性系, 但此时形变大小不是位移, “其中 x_0 和 $x_0' = x_0 - vt$ 分别为小球的平衡位置在地面和小车上的坐标” 就错了. 由于力和距离是伽利略变换的不变量, 而位移不是伽利略变换的不变量, 因此需要正确理解胡克定律, 区分位移和距离两个概念. 两种表述方式并非始终等价, 当观察者相对于弹簧的固定端静止时二者等价, 笔者建议把胡克定律表述为“弹力的大小与形变大小成正比”较好.

由于流体力学中的伯努利方程是由机械能守恒定律和连续性方程推导出来, 连续性方程不是牛顿运动定律的推论, 因此伯努利方程不单纯是动力学方程, 不满足伽利略变换与力学相对性原理并不矛盾[46].

参考文献:

1. 刘明成, 机械能守恒定律遵从力学相对性原理. 松辽学刊(自然科学版), 2001(2): 28~30.
2. 熊秉衡. 在不同惯性系中的机械能守恒定律[J]. 物理通报, 1964(6): 261~264.
3. 熊秉衡. “在不同惯性系中的机械能守恒定律”一文的更正与补充[J]. 物理通报, 1965(3): 116~117.
4. 赵志栋, 陈光红. 轻弹簧之“困境”. 物理通报, 2016(5): 98~101.
5. 唐龙. 例说能量的系统性和相对性. 物理教师, 2016(6): 18~19.
6. 蔡伯濂. 关于讲授功和能的几个问题[J]. 工科物理教学, 1981(1), 7~13.
7. 朱如曾. 弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒——关于‘对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷’的商榷[J]. 物理通报, 2015(4): 100~103.
8. 郑永令. 力学[M](第二版). 高等教育出版社, 2002年: 194.
9. 史玉昌. 势能和机械能守恒定律[J]. 大学物理, 1988(7): 16~17.
10. 郑金. 对一道物理竞赛题的两种互异解答的探讨[J]. 物理通报, 2015(7): 109~112.
11. 李阳, 王宏, 韩艳玲. 与 r 的一次方成正比有心力作用下质点的运动研究. 物理通报, 2015(12): 4~7.
12. 张翠. 斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解. 物理通报, 2016(9): 115~117.
13. 赵文桐, 刘文芳, 刘明成. 重力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]. 物理通报, 2015(3): 96~98.
14. 朱如曾. 力场与时间有关系统的功能定理及其应用. 大学物理, 2016(10): 11~16.

15. 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程, 高等教育出版社, 2004 年第二版, 113~114.
16. 李有为. 受光滑约束系统的机械能守恒问题. 郑州工学院学报, 1989 (9) : 91~94.
17. 卜春彦. 宇航员失重问题的再探讨. 物理通报, 2016 (9) : 118~120.
18. 刘文芳, 刘明成. 关于功能原理之来源之探索. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 2007 (2) : 119~120.
19. 罗志娟, 段永法, 谢艳丁, 何艳. 关于功能原理的讨论. 物理通报, 2014 (11) : 106~107.
20. 袁书卿, 万明理. 关于质点系功能原理和机械能守恒定律相关问题的讨论. 洛阳师范学院学报, 2014(8) : 50~53.
21. 张小溪. 也谈力学相对性原理与机械能[J]. 怀化师专学报, 1994(4): 112~114.
22. 张景春, 韩淑梅. 浅析物体系的势能[J]. 辽宁大学学报 (自然科学版), 1989(4): 33~36.
23. 费恩曼. 新千年版物理学讲义[M]. 上海科学技术出版社, 2013 年: 148.
24. 鲁增贤, 杨大伟, 刘明成. 相对性原理和协变性要求. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 82~83.
25. 赵治华, 史祥蓉. 什么是保守力. 工科物理, 1997 年第一期: 2~4.
26. 李卫平, 罗洁. 注意力的保守性和参照系的关系. 中学物理, 2013 年 3 月第 5 期: 42~43.
27. 李学生, 师教民. 对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷[J]. 物理通报, 2014(9): 119~120.
28. 刘明成, 赵文桐, 刘文芳. 弹力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]. 物理通报, 2015(12): 109~111.
29. 刘明成, 赵文桐, 刘文芳. 引力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]. 物理通报, 2015(6): 123~124.
30. 朗道. 力学[M] (第四版). 北京: 高等教育出版社, 1987 年: 13.
31. 费恩曼. 新千年版物理学讲义[M]. 上海科学技术出版社, 2013 年: 149.
32. 漆安慎, 杜婵英. 包景东修订. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012 年: 139.
33. 李力. 谈机械能守恒定律的正确表述[J]. 物理通报, 2007(3): 21~22.
34. 蔡伯濂. 大学物理编辑部. 关于力学相对性原理与机械能守恒的来稿综述. 大学物理, 1994 (1) .
35. 高炳坤. 大学物理编辑部. 机械能守恒定律和相对性原理. 大学物理, 1999 (1) .
36. 高炳坤. “机械能守恒定律是否遵从力学相对性原理”辨. 大学物理, 2000 (2) .
37. 朱如曾. 相对性原理及其对自然界定律的协变性要求——机械能守恒定律协变性疑难的解答. 大学物理. 2000 (2) : 15~19, 26.
38. 喀兴林. 编者的话. 大学物理, 2000 (2) .
39. 朱如曾. 相对性原理对普遍定律和非普遍定律参考系变换性质的不同要求——关于协变性疑难的进一步讨论. 大学物理, 2002 (3) : 19~23.
40. 赵凯华. 编者的话. 大学物理, 2002 (3) .
41. 高炳坤. 用伽利略变换审视牛顿力学, 2010 (6) : 1~3.
42. 胡世巧、张务华、张风云. 牛顿力学的数学系统和力学相对性原理[J]. 河南师范大学学报 (自然科学版) 出版年 (期) : 36~39.
43. Santos FC, Soares V and Tort AC. A note on the conservation of mechanical energy and the Galilean principle of relativity[J]. European Journal of Physics. 2010, 31(4): 827-834.
44. 刘一贯. 关于机械能守恒定律的协变性, 华南师范大学学报 (自然科学版). 1985 (1) : 155~157
45. 卜春彦. 声波方程满足伽利略变换下的形式的不变性. 物理通报. 2017 (2) : 108.
46. 郑永令. 流体流动状态与伯努利方程. 大学物理, 1994 (8) : 1~4.
47. 刘瑞金. 机械能相关问题的讨论. 淄博学院学报 (自然科学与工程版). 2001 (12) : 47~50.
48. 谭昌炳. 机械能定理和力学相对性原理. 三峡大学学报 (自然科学版). 2005(2): 93~96.

The law of conservation of mechanical energy is the law of particle dynamics

——A review of research to the relationship between the principle of mechanical relativity and the Law of conservation of mechanical energy

Abstract: This paper analyzes fifteen problems that need to be understood accurately when studying the relationship between the conservation of mechanical energy and the principle of relativity of mechanics. It is these questions that have led to long-standing debates. It is suggested that the mechanics textbook should specify, especially the basic definition of potential energy. According to the definition of potential energy, the general formula of potential

energy in inertial system can be derived. The external potential energy can not have the invariance of Galilean transformation. At last, a brief general proof is given that the law of conservation of mechanical energy satisfies the principle of relativity of mechanics, and Newton's law of motion satisfies Galilean transformation, are all the sufficient condition for the law of conservation of mechanical energy to satisfy Galilean transformation.

Key words: Conservation of mechanical energy; Mechanics relativity principle; Potential energy formula; Potential energy definition; Particle dynamics

5/4/2017