27. 内势能与外势能的转化问题

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）
xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要 (Abstract): 物理学是科学的基本学科。本文章分析探讨了现代物理学的重要问题，**内势能与外势能的转化问题**, 供参考。

[李学生 (Li Xuesheng). **27. 内势能与外势能的转化问题.** *Academ Arena* 2017;9(15s): 112-115]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 27. doi:10.7537/marsaaj0915s1727.

关键词 (Keywords): 质点；电荷；引力；电力；空间；方程；量子力学；**势能**

根据经典力学星体的运行问题应该按照两体问题解决，质量应该用它们的折合质量（约化质量）代替．**笔者认为：在双星现象中如果以一个星体为参照系，机械能并不守恒（后面分析利用双星的折合质量（约化质量）计算可以）．太阳系的质心与太阳自身的质心并不重合，因而太阳的公转中心不是太阳自身的质心，而是绕太阳系的质心的偏心摆动式的自转，就像地球绕月地系统的质心的偏心摆动式的自转一样．**

如果星体 B 绕星体 A 运行的轨道是严格的椭圆，以星体 A 为参照系机械能是守恒的，下面推导一下：在极坐标中 $v_r=\dot{r}$ ………（1），$v_\theta=r\dot{\theta}$ ………（2），其中 v_r、v_θ 分别表示径向速度和横向速度．由于两个星体都做加速运动，因此星体 B 应当用它的折合质量（约化质量）．

由椭圆方程 $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 得：$\dfrac{ep}{r}=1-e\cos\theta$，两边对时间求导，有：$-\dfrac{ep\dot{r}}{r^2}=e\sin\theta\dot{\theta}$

整理可得：$\dot{r}=-\dfrac{r^2}{p}\sin\theta\dot{\theta}$ ……………………………………………（3）

星体 B 运动的速度为：

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{r^2+(r\theta)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{r^4}{p^2}\sin^2\theta^2+\frac{r^4\theta^2}{r^2}}$$
$$=r^2\theta\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{p^2}+\frac{1}{r^2}}$$
$$=r^2\theta\sqrt{\frac{e^2\sin^2\theta}{e^2p^2}+\frac{(1-e\cos\theta)^2}{e^2p^2}}$$
$$=\frac{r^2\theta}{ep}\sqrt{e^2\sin^2\theta+(1-e\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{r^2\theta}{ep}\sqrt{1-2e\cos\theta+e^2}$$

即：$v=\dfrac{r^2\dot{\theta}}{ep}\sqrt{1-2e\cos\theta+e^2}$ ……………………………………………（4），这个结果中只有 θ 是变量，其它都是常数，特别是 $r^2\dot{\theta}$ 为常数．这表明：$0\le\theta\le\pi$ 时，v 是增函数，v 随 θ 的减小而增大；$\pi\le\theta\le2\pi$

时，v 是减函数，v 随θ的增大而减小．实际上，由于$r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$，所以上面的结果也可以用 r 来说明：$0\le\theta\le\pi$时，v 是增函数，v 随 r 的减小而增大；$\pi\le\theta\le 2\pi$时，v 是减函数，v 随 r 的增大而减小．由动能的表达式及（4）式可知：$E_k=\frac{mM\left(1-2e\cos\theta+e^2\right)}{2(M+m)}\cdot\left(\frac{r^2\dot\theta}{ep}\right)^2$ …………………（5）

椭圆面积：$S=\pi ab$ …………（6），其中 a、b 分别表示椭圆的长轴和短轴，对椭圆方程$r=\frac{pe}{1-e\cos\theta}$来说，当$\theta=0$时，$r_1=\frac{pe}{1-e}$ …………（7），当$\theta=\pi$时，$r_2=\frac{pe}{1+e}$ ………………………（8）

如图 1 所示，r_1用红色的线段来表示，r_2用绿色的线段来表示．可知：$r_1+r_2=2a$ ……………………（9）

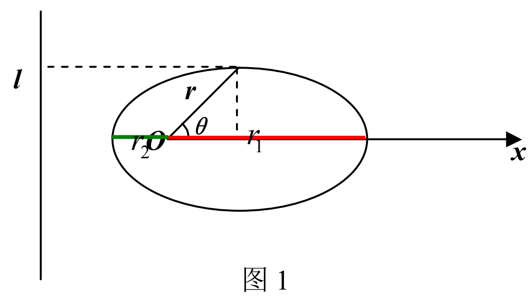

图 1

由（7）（8）（9）可得：$a=\frac{ep}{1-e^2}$ … … … … … … …（10），$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{a^2-(ae)^2}=a\sqrt{1-e^2}=\frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}$ …………………………………（11）

将（10）（11）式代入（6）式可知：$S=\pi\cdot\frac{ep}{1-e^2}\cdot\frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}==\frac{\pi e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ……………………（12）

掠面速度$\frac{1}{2}r^2\dot\theta=\frac{S}{T}=\frac{\pi e^2p^2}{T\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，从而有：$r^2\dot\theta=\frac{2\pi e^2p^2}{T\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ …………………（13）

将（13）式代入（5）可知：

$$E_k=\frac{mM\left(1-2e\cos\theta+e^2\right)}{2(M+m)}\cdot\left(\frac{1}{ep}\right)^2\cdot\frac{4\pi^2e^4p^4}{T^2\left(1-e^2\right)^3}$$

$$=\frac{4\pi^2}{ep}\cdot\frac{mM\left(1-2e\cos\theta+e^2\right)}{2(M+m)}\cdot\frac{\left(\frac{ep}{1-e^2}\right)^3}{T^2}$$

$$=\frac{4\pi^2}{ep}\cdot\frac{mM\left(1-2e\cos\theta+e^2\right)}{2(M+m)}\cdot\frac{a^3}{T^2}$$

上式中最后一个因子$\frac{a^3}{T^2}$出现在 Kepler 第三定律中，我们知道，它是一个常数(高斯常数应修正为G(M+m))，在这里我们用 k 来表示这个值．有：$E_k=\frac{4\pi^2 k}{ep}\cdot\frac{mM\left(1-2e\cos\theta+e^2\right)}{2(m+M)}$…………………（14），

另外，由$GM=4\pi^2 k$，代入（14）式有：$E_k=\frac{GM^2}{ep}\cdot\frac{m\left(1-2e\cos\theta+e^2\right)}{2(M+m)}$……………………（15）

我们采用传统的方法规定零势能点，即规定无穷远处势能为零．有：

$E_p=-\int_r^{\infty}\frac{GM^2 m}{r^2(m+M)}dr==-\frac{GM^2 m}{r(M+m)}$……………………（16），将$r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$代入上式可得：

$E_p=-\frac{GM^2 m\left(1-e\cos\theta\right)}{ep(m+M)}$………………（17），由（14）（17）两式可得星体 B 运动中的机械能总量．

$$
\begin{aligned}
E=E_k+E_p&=\frac{G}{ep}\cdot\frac{mM^2\left(1-2e\cos\theta+e^2\right)}{2(M+m)}+\left[-\frac{GM^2 m\left(1-e\cos\theta\right)}{ep(m+M)}\right]\\
&=\frac{GM^2 m}{2ep(M+m)}\left[1-2e\cos\theta+e^2-2+2e\cos\theta\right]\\
&=\frac{GM^2 m}{2ep(M+m)}\left(e^2-1\right)\\
&=-\frac{GM^2 m}{2(m+M)}\cdot\frac{1-e^2}{ep}\\
&=-\frac{GM^2 m}{2a(M+m)}
\end{aligned}
$$

即$E=-\frac{GM^2 m}{2a(m+M)}$……………（18）．这个结果说明，星体 B 运动过程中机械能守恒．

也可以这样推导，由式$\mathrm{f}_{12}=\mu\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2}$出发，将等式两侧点乘相对位移，作类似于推导质点动能定理的运算，对于两体问题有$dA=\mathrm{f}_{12}\bullet d\mathrm{r}=\left(\mu\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2}\right)\bullet d\mathrm{r}=\mu\frac{d\mathrm{v}_{相}}{dt}\bullet d\mathrm{r}=\mu\frac{d\mathrm{r}}{dt}\bullet\frac{d\mathrm{v}_{相}}{d\mathrm{r}}\bullet d\mathrm{r}=d\left(\frac{1}{2}\mu\mathrm{v}_{相}{}^2\right)$，

积分上式有$A=\int\mathrm{f}_{12}\bullet d\mathrm{r}=\frac{1}{2}\mu\mathrm{v}_{相}{}^2-\frac{1}{2}\mu\mathrm{v}_{相0}{}^2$，上式中 A 应理解为一对内力做功之和，其理由如下：对于某一参照系，一对内力做功之和为$\int\mathrm{f}_{12}\bullet d\mathrm{r}_1+\int\mathrm{f}_{12}\bullet d\mathrm{r}_2=\int\mathrm{f}_{12}\bullet(d\mathrm{r}_1-d\mathrm{r}_2)=\int\mathrm{f}_{12}\bullet d\mathrm{r}_{12}$．

这表明：从任何参照系去计算一对内力做功之和，其结果都可表示为“相对动能”的增量．

若系统中的内力为保守力，根据势能定义有$\mathrm{E_p}-\mathrm{E_{p0}}=-\mathrm{A}_{内保}$，代入可得$\frac{1}{2}\mu\mathrm{v}_{相}{}^2+\mathrm{E_p}=\frac{1}{2}\mu\mathrm{v}_{相0}{}^2+\mathrm{E_{p0}}$，这是两体系统中的机械能守恒．

将这个定理应用于两体行星运动问题中，内力为万有引力，是保守力．根据引力势能的定义，有

$$\frac{1}{2}\mu v_{相}{}^{2}-\frac{Gm_1m_2}{r}=\frac{1}{2}\mu v_{相0}{}^{2}-\frac{Gm_1m_2}{r_0}.$$

记 m＝m_1+m_2，则上式可写成 $\frac{1}{2}\mu v_{相}{}^{2}-\frac{G\mu m}{r}=\frac{1}{2}\mu v_{相0}{}^{2}-\frac{G\mu m}{r_0}$ ，中只出现相对位置和相对速度，应用它分析天体的相对运动是十分方便的．折合质量（约化质量）的观点正符合马赫哲学的观点，马赫曾经指出："质量的真正定义只能从物体间的动力学关系推演出来．不仅惯性力与周围物质的存在和行为有关，物体本身的惯性也并非物体的固有属性，而是源于宇宙中所有其它物质的存在．"

在重力势能问题中由于一般物体的质量与地球质量相去甚远，可以把地球质量视为无穷大，这样以地球为参照系，物体的折合质量就是物体本身的质量，从这个角度出发也可以得出重力势能为外势能．如果把地球的质量视为无穷大，以相对于地球匀速运动的物体为参照系考察地球和作自由落体运动的质点这个系统动量也守恒，前后都是无穷大；但是如果把地球的质量为有限值，在该参考系观察地球的动量不变，质点的动量变化，动量不守恒，原因在于此时不是严格的惯性系．

在内势能问题中如果以质心为参照系，也可以转化为外势能的问题．

5/4/2017