

26. 内势能与外势能关系初探

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授, 理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员, 中国民主同盟盟员 (作者为中国科学院高能物理所研究员)

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要: 文章分析了内势能与外势能之间的关系, 尽管势能属于系统, 但是当相互作用的两个物体质量相差悬殊时, 采用外势能计算是极为方便的, 内势能具有伽利略变换的不变性, 外势能不具有伽利略变换的不变性.

[李学生 (Li Xuesheng). 26. 内势能与外势能关系初探. *Academ Arena* 2017;9(15s): 109-111]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 26. doi:[10.7537/marsaaj0915s1726](https://doi.org/10.7537/marsaaj0915s1726).

关键词: 内势能; 外势能; 伽利略变换不变性; 力学相对性原理; 机械能守恒

中图分类号: O 313.1

文献标识码: A

1、问题的提出

50多年来, 力学教学界围绕着关于外势能的机械能守恒定律是否满足力学相对性原理 (或者说伽利略变换) 存在一些争论和分歧, 出现了机械能守恒定律不满足力学相对性原理、机械能守恒定律满足力学相对性原理但是不具有单独的协变性以及机械能守恒定律满足力学相对性原理也具有单独的协变性三种截然不同的结论. 为了协调机械能守恒定律和力学相对性原理之间的关系, 人们开始怀疑引入外势能概念的必要性, 结果不但使功能原理和机械能守恒定律出现了两种表述, 还涉及到经典力学系统的稳定性问题.

2、外势能是内势能的极限情况

由于有人怀疑引入外势能概念的必要性, 认为势能属于系统, 从两体问题的角度分析, 导致了机械能守恒定律不满足力学相对性原理的结论, 笔者经过认真思考后认为必须正确理解内势能与外势能之间的关系, 下面以重力势能为例分析一下这个问题 (引力势能和弹性势能的分析类似, 只是数学运算复杂一些).

由于研究重力机械能守恒定律时不考虑地球的公转、自转和体积大小因素的影响, 为了研究问题的方便, 设地球 (视为质点, 下同) 质量为 M , 物体的质量为 m , 忽略其它力 (在这里仅从理论上推导机械能守恒定律, 生产实践和科学实验中还要考虑其它因素).

下面我们先从两体角度 (内势能) 出发分析自由落体问题, 由于把自由落体问题看作两体问题, 需要考虑地球受到物体 (视为质点) 微弱的作用力, 因此地球和物体都不是严格的惯性系, 但是系统的质心确实严格的惯性系, 因此我们设地球与物体的质心为 A 点.

M . A . m

设地球与物体之间的作用力恒为 mg , 距离为 h , 地球移动的距离为 h_1 , 由于系统受到的合外力为 0 , 因此根据牛顿第一定律, 初始状态地球与物体相对于 A 点静止, 系统的势能为 mgh , 设到达 A 点物体的速度为 v_2 . 则由运动学得 $v_1^2 = 2g(h-h_1)$, $v_2^2 = 2mgh_1/M$, 地球移动距离为 h_1 . 此时系统的动能之和为 $\frac{1}{2} Mv_2^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} m \cdot 2g(h-h_1) + \frac{1}{2} M \cdot 2mgh_1/M = mg(h-h_1) + mgh_1 = mgh$.

上面的推导得出的结论与以地球为参照系得出的结论一致, 事实上当时是把地球质量认为无穷大, 以地球为参照系得出的, 严格上讲是近似规律, 因为根据动量守恒定律可以得出 $Mh_1 = m(h-h_1)$, $h_1 = mh/(M+m)$, 此时以地球为观察者物体的运动速度大小为

$$\sqrt{2g(h-h_1)} + \sqrt{2mgh_1/M} = \sqrt{2gMh/(M+m)} + \sqrt{2m^2gh/[M(M+m)]}$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt{2gh}(\sqrt{M/(m+M)} + \sqrt{m^2/[M(M+m)]}) = \sqrt{2gh}\sqrt{(m+M)/M} \neq \sqrt{2gh}$$

这一结论也可以利用折合质量 $\frac{Mm}{m+M}$ 计算得出, 以地球为参照系, 物体的折合质量为 $\frac{Mm}{m+M}$, 以地球为参照系物体下落到地面的速度为

$$\sqrt{2ah} = \sqrt{2 \frac{mg}{mM} h} = \sqrt{\frac{2gh}{m+M} \sqrt{(m+M)/M}}, \text{ 折合质量的计算更简洁一些.}$$

与以地球为参照系得出的速度大小不相等，实际上当 M 视为无穷大时上式等号成立，这也符合唯物辩证法的量变质变规律，也符合玻尔提出的对应原理。

从这里可以看出自由落体运动的计算得出的也是近似值。设 $f(m) = \sqrt{2gh} \sqrt{(m+M)/M}$ ，显然是关于 m 的增函数，在牛顿力学里以地球为参照系物体下落的速度确实与物体的质量有关，质量越大下落越快，但并不是亚里士多德所说的下落速度与质量成正比。这个结果可以给出一个直觉解释，随着物体质量的增加，地球的加速度也在不断增加，时间也会逐渐缩短。由于一般物体的质量较小，系统相对误差较小，在实验中无法发现，通过上式可以把实验结果与计算数据进行矫正，只要 $V_{\text{实验值}} = V_{\text{理论值}} \sqrt{(m+M)/M}$ ，即可以说实验是完全成功的。由于地球的质量巨大，上述的分析只具有理论意义，系统误差的大小不仅远远小于空气阻力的影响，也远远小于重力加速度的变化产生的影响，甚至小于质点由于运动引起的狭义相对论效应，生产实践和科学实验中可以不予考虑，而且由于不知道地球的具体质量，按照内势能计算复杂、误差可能会更大。

类比于上面的分析平抛运动、斜抛运动等物体在重力场中的运动规律也是近似规律，但是系统相对误差极小，生产实践中可以不予考虑。下面推导其系统相对误差的大小：

由上面的推导可知， $mv_1 = Mv_2$ ， $v_2 = mv_1/M$ 。在物理学中把与观察者（或参照系）实际同一的速度为牵连速度，此时需要考虑到牵连速度。以地球为参照系物体到达 A 点时系统的机械能为物体的动能 $\frac{1}{2} m(v_1+v_2)^2 = \frac{1}{2} m(v_1 + mv_1/M)^2 = \frac{1}{2} mv_1^2(1+m/M)^2$ ，开始时的机械能为 $mgh = \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} Mv_2^2 = \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} M(mv_1/M)^2 = \frac{1}{2} mv_1^2(1+m/M)$ ，系统误差为 $\frac{1}{2} mv_1^2(1+m/M)^2 - \frac{1}{2} mv_1^2(1+m/M) = \frac{1}{2} mv_1^2(1+m/M)m/M = mgh \cdot m/M$ 。系统相对误差为 m/M ，由于一般物体的质量与地球质量相去甚远，所以系统相对误差较小。当把地球质量视为充分大时，此时机械能守恒定律称为**落体机械能守恒定律**，**此时物体的势能称为外势能**，系统相对误差为 0。文献[2]已经分析了关于外势能的重力机械能守恒定律具有伽利略变换的不变性（解决问题的关键在于重力势能的零点相对于观察者不变）。

在教科书中，引入势能时，一般只提到：由于保守力做功与路径有关，可以引入势能，势能定义为：势能增量的负值等于保守力所做的功，并没明确指出是单个保守力做功，还是一对保守力所做的和功。对于外势能的机械能守恒定律应该是单个保守力做功，此时地球质量为充分大；对于内势能的机械能守恒定律是一对保守力做功，此时应该把地球质量视为有限值，地球不再是惯性系了。

这场大讨论出现裂痕的症结之一在于是否把地球的质量视为充分大，如果视为充分大，地球的质心与系统的质心重合，前面的文章已经分析了以地球以及相对于地球匀速运动的物体为参照系机械能守恒定律满足力学相对性原理（此时机械能守恒定律可称为外势能的机械能守恒定律）。如果把地球质量视为有限值时称为内势能的机械能守恒定律，在内势能的机械能守恒定律中把地球的质量视为无穷大变为外势能的机械能守恒定律，换句话说外势能的机械能守恒定律是内势能的机械能守恒定律的极限情况。

有人认为重力势能属于地球与物体，重力场中质点的势能是一种简略说法，笔者认为这个观点是错误的，应该是精确度极高的数学处理方法——认为地球质量为充分大。重力势能属于地球和物体理论上没有错误，但是没有实际意义，真正有意义的是重力势能属于物体，这句话是完全正确的。

外势能的机械能守恒定律——经典力学中的功能原理是由动能定理导出的：动能定理一般可表述为 $A_{\text{内}} + A_{\text{外}} = E_k - E_{k0}$ (1)，诸外力所做之功和诸内力所作之功之代数和等于系统(质点组)总动能的改变量。功能原理是由式(1)导出的，即将等号左边内、外保守力的功写成势能改变量的负值并移到等号右边而得到的，一般可表述为 $A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$ (2)。诸外非保守力所作之功和诸内非保守力所作之功之代数和等于系统(质点组)总机械能的改变量。将式(2)左端两项合并为非保守力的功，功能原理就可以简单地表述为，非保守力的功等于总机械能(动能+势能)的改变量。功能原理式(2)有重要推论——**机械能守恒定律**。例如若式(2)左端恒为零，即 $A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = 0$ ，则有 $E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$ (3)，系统机械能守恒。式(3)即机械能守恒

定律. 机械能守恒定律成立是有条件的, 即式(2)左端恒为零. 式(2)左端一般情况下为一个多项式, 如要多项式恒为零, 必须其每一项恒为零, 因此守恒条件变成系统不受任何非保守力作用.

内势能的机械能守恒定律——中国大多数力学教科书都将功能原理表述为 $A_{外} + A_{内非} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$ (4), 诸外力所做之功和诸内非保守力所做之功之代数和等于系统总机械能的改变量, 它也满足力学相对性原理. 按柯尼希定理, 式(4)等号右端总动能 E_k 应分解为质心动能 E_{Ck} 与各质点相对质心的动能 $E_{内k}$ 两项之和. 总势能 E_p 应改为内势能 $E_{内p}$. 故式(4)应具体表示为 $A_{外} + A_{内非} = (E_{内k} + E_{内p}) - (E_{内k0} + E_{内p0}) + (E_{Ck} - E_{Ck0})$

(5), 诸外力所做之功和诸内非保守力所做之功之代数和等于系统内保守力所对应的机械能的改变量加系统质心动能的改变量. 当 $A_{外} + A_{内非} = 0$ 时, 系统内保守力所对应的机械能守恒, 系统质心动能守恒.

对于自由落体而言, 内势能的机械能守恒定律是把地球与物体看做一个系统, 此时地球不再是严格的惯性系, 必须以系统的质心为参照系, 非常复杂, 不具有实际意义.

在单摆问题中如果视为重力机械能问题, 摆线的作用力为外力. 把单摆固定在地面上, 在地面系守恒, 在小车系不守恒[1], 但是如果去掉摆线做的功(地面系摆线做功为0, 小车系做功不等于0), 重力机械能守恒定律依然成立. 如果把摆线的作用力也看作是保守力的一部分, 前面已经分析无论在地面系还是小车系, 机械能都守恒. 在斜面问题中也存在类似问题[2].

有人是在地球质量为充分大的前提下以地球或者以相对于地球匀速运动的物体为参照系机械能守恒定律严格成立, 此时机械能守恒定律满足力学相对性原理的, 系统的质心与地球的质心并不完全重合, 至此这场跨越 50 多年的大讨论可以画上一个圆满的句号. 牛顿力学包括牛顿运动定律和万有引力定律, 只有在惯性系中才可以二者综合应用, 否则会出现错误.

两个质点之间的万有引力势能是两个质点坐标(共 6 个位形坐标 x, y, z 和 X, Y, Z) 的函数, 称为内势能. 当其中一个质点远大于另一个质点时, 小质点的运动近似不影响大质点的运动, 因此大质点就静止或作匀速直线运动, 总之, (X, Y, Z) 是已知的函数. 当研究这个系统的运动时, 因为 (X, Y, Z) 是已知的, 问题就只剩 x, y, z 这三个未知数了. 系统的内势能就只是 (x, y, z) 的函数, 而 (X, Y, Z) 称为已知参数. 这时称这个内势能为外势能. 弹力、重力、万有引力都是一个场的问题, 重力场认为是恒定场, 万有引力场认为是大小可以变换, 方向不变的力场, 轻质弹簧的弹力场认为是大小和方向都可以变化的场, 但是力的强度仅与位置有关, 不是一个显含时间的力.

根据上面的分析可以得出, 严格讲势能属于系统, 都是内势能, 但是当相互作用的两个物体质量相差极大时, 可以把质量极大的物体作为惯性系(即质量视为充分大), 内势能可以看成是质量较小物体的外势能. 对于弹性势能和万有引力势能也存在这个问题, 例如当弹簧固定于地面时视为外势能, 当弹簧连接两个普通的质量差别不大的物体时视为内势能; 研究地球和人造卫星之间的引力势能时视为外势能, 研究地球和月球之间的引力势能时视为内势能. 由于一般力学实验中物体的质量远远小于地球的质量, 因此重力势能应该视为外势能. 由于我们不知道地球质量的精确值, 把重力势能视为内势能, 系统相对误差可能会更大. 一句话, 外势能是内势能的极限情况, 是内势能的一种数学处理方法, 量变引起了质变(内势能具有伽利略变换的不变性, 外势能不具有伽利略变换的不变性). 类似地, 人起源于动物, 但是人与动物有本质的区别. 在双星现象中, 如果一个星体的质量极大, 也可以近似认为是质量较大的星体为恒星, 质量较小的星体为行星[3].

经典的势能公式(重力势能、弹性势能、引力势能公式), 对于内势能静止系与运动系都成立, 对于外势能仅仅适用于静止系, 运动系需要根据势能的定义(势能的减少等于保守力做的功)重新推导.

参考文献:

- 1 蔡伯濂. 关于力学相对性原理与机械能守恒的来稿综述. 大学物理, 1994 (1).
- 2 赵文桐, 刘文芳, 刘明成. 重力机械能守恒定律在各惯性系都成立. 物理通报, 2015 (3).
- 3 李学生. 双星运行的轨道. 物理通报, 2014 (12), 15-18.

5/4/2017