25. 自然摆动的单摆机械能守恒问题新解

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师，中国管理科学院学术委员会特约研究员，北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）
xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘　要：重新解答了自然摆动的单摆机械能守恒问题，得出了在地面上和相对于地面做匀速运动的小车上，单摆的机械能都守恒的新结论.

[李学生 (Li Xuesheng). 25. **自然摆动的单摆机械能守恒问题新解.** *Academ Arena* 2017;9(15s): 105-108]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 25. doi:10.7537/marsaaj0915s1725.

关键词：单摆；动能；势能；机械能守恒
中图分类号：O 313.1　　　　　　　　**文献标识码**：A

在中学物理和大学力学中，单摆摆动过程中的摆锤的运动可以利用重力机械能守恒定律来研究，可是参考文献[1～5]得出在单摆问题中机械能守恒定律不满足伽利略变换，本文就单摆在摆动过程中的机械能守恒问题作进一步研究.

将摆锤质量为 m，轻质摆线（摆线质量视为 0）长度为 L 的单摆挂在与地面相固连的摆架上，将摆锤从单摆静止时的竖直下垂位置拉至摆角为 θ_0（$\theta_0 \in [0^0,90^0]$时自然放手，在忽略各种阻尼时，单摆就做自然摆动，θ_0 为最大摆角．有一小车相对于光滑地面以正常数 u 沿单摆摆动方向向右运动．试问在地面（地球质量视为充分大，故稳定地保持为惯性系）和小车上观察，单摆的机械能是否守恒，并说明理由.

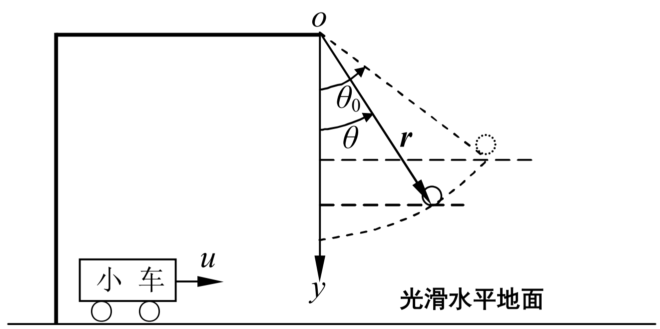

图 1　自然摆动单摆机械能守恒问题新解

解：**在地面上观察**时，以单摆的悬挂点 o 为极点，单摆静止时与摆线重合的射线 oy 为极轴，从 o 到摆锤的矢量 $\boldsymbol{r}$ 为极径，极轴和极径的夹角 θ 为极角建立平面极坐标系如图 1 所示.

设在**地面上观察**时，单摆在 t=0 时刻从最大摆角 θ_0（$\theta_0 \in (0^0,90^0]$）开始摆动，t 时刻的摆角、速度大小、切向加速度大小、动能、势能、机械能分别为：θ，v，a，$E_k(t)$，$E_p(t)$，$E(t)$；在**小车上观察**时，单摆在 t 时刻的摆角、速度大小、动能、势能、机械能分别为：θ_1，v_1，$E_{1k}(t)$，$E_{1p}(t)$，$E_1(t)$；**在地面上和小车上观察时，都设摆锤的最高点为零势点**．则有：

$$v \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}[L(\theta_0-\theta)]}{\mathrm{d}t} \quad \frac{-L\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

$$\mathrm{d}t \quad \frac{-L\mathrm{d}\theta}{v} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0).$$

$$mg\sin\theta \quad ma,\ g\sin\theta \quad a \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}v}{-L\mathrm{d}\theta} \quad \frac{-L\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}v}{-L\mathrm{d}\theta}\ v,\ v\mathrm{d}v \quad gL\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

$\int_0^v v \, \mathrm{d}v \quad gL\int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta \mathrm{d}\theta$，$\frac{1}{2}v^2 \quad gL(\cos\theta \quad \cos\theta_0)$．$v \quad \sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}$．

$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \frac{v}{-L} \quad \frac{1}{L}\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}$

$\sqrt{2\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\theta_0)} \quad \sqrt{2\frac{g}{L}\cos\theta-2\frac{g}{L}\cos\theta_0} \quad <$ ，

所以对于一个确定的单摆而言，只要初始状态确定，单摆的摆角是时间 t 的单值函数，因此我们只需证明任意摆角的机械能相等即可，在本题中是减函数.

$E_k(t) \quad E_k'(\theta)=\frac{1}{2}mv^2 \quad mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0)$；

$E_P(t) \quad E_P'(\theta)=-\int_{\theta_0}^{\theta}\mathrm{mgLsin}\theta\mathrm{d}\theta= \quad m \quad gL\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta=-mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0)$

$E(t) \quad E_k(t) \quad E_P(t) \quad E_k'(\theta) \quad E_P'(\theta)=mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0)-mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad 0$．

所以**在地面上观察**时单摆的机械能守恒，守恒值为 *0*.

直觉判断：

因为摆锤在最高点以匀速度 u 相对于小车沿 x 轴负向运动，我们规定此时的势能为 0，所以**在小车上观察**时，单摆的机械能比在**在地面上观察**时增加 $\frac{1}{2}m(\quad u)^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$，所以**在小车上观察**时，单摆的机械能为：

$E_1(\theta) \quad E(\theta) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad 0 \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$（常数）．

所以，**在小车上观察**时，单摆的机械能守恒，守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$.

数学推导：在地面系——设初相为 0，$v=\omega R$,

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y=R\sin\omega t \end{cases}$$

将运动方程作伽利略变换，写出小车系运动方程：

$$\begin{cases} x_1=x-ut=R\cos\omega t-ut \\ y_1=y=R\sin\omega t \end{cases}$$

因此在小车系，轨迹仍然是一个圆，圆心做匀速直线运动，向心力与弧线垂直.

在**小车**上观察时有：

$v_{1\theta} \quad v \quad u\cos\theta$，$v_{1\theta}^2 \quad (v \quad u\cos\theta)^2 \quad v^2 \quad u^2\cos^2\theta \quad 2vu\cos\theta$；$v_{1r} \quad u\sin\theta$，$v_{1r}^2 \quad u^2\sin^2\theta$．

$v_1^2 \quad v_{1\theta}^2 \quad v_{1r}^2 \quad v^2 \quad u^2\cos^2\theta \quad 2vu\cos\theta \quad u^2\sin^2\theta \quad v^2 \quad u^2 \quad 2u \quad v\cos\theta$

$2gL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad u^2 \quad 2u\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\cos\theta$．

$E_{1k}(t) \quad E_{1k}'(\theta)=\frac{1}{2}mv_1^2 \quad mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\cos\theta$．

$v \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}[L(\theta_0-\theta)]}{\mathrm{d}t} \quad \frac{-L\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，$\mathrm{d}t \quad \frac{-L\mathrm{d}\theta}{v}$ （$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$）．

$a_1 \quad a \quad g\sin\theta$．$ma_1 \quad ma \quad mg\sin\theta$．

$$0 \quad E_{1p}(t) \quad E_{1p}'(\theta)= \int_{\theta_0}^{\theta} ma_1 \, \mathrm{d}s \quad \int_0^t ma_1 u\cos\theta \, \mathrm{d}t \quad \int_0^t m\frac{v^2}{L} u\sin\theta \, \mathrm{d}t$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} mg\sin\theta \, (\quad L\mathrm{d}\theta) \quad mu \int_0^t \left(g\sin\theta\cos\theta+\frac{v^2}{L}\sin\theta\right)\frac{-L\mathrm{d}\theta}{v}$$

$$mgL\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta \, \mathrm{d}\theta \quad muL \int_{\theta_0}^{\theta}\left(g\cos\theta+\frac{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}{L}\right)\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{v}$$

$$mgL\cos\theta\Big|_{\theta_0}^{\theta} \quad mugL \int_{\theta_0}^{\theta}(\cos\theta+2\cos\theta-2\cos\theta_0)\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}}$$

$$mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad \frac{3mugL}{\sqrt{2gL}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos\theta-\cos\theta_0+\cos\theta_0-\frac{2}{3}\cos\theta_0}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \, \mathrm{d}\cos\theta$$

$$mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad \frac{3mugL}{\sqrt{2gL}}\frac{2}{3}(\cos\theta \quad \cos\theta_0)^{\frac{3}{2}} \quad \frac{mugL}{\sqrt{2gL}}(\cos\theta \quad \cos\theta_0)^{\frac{1}{2}}\cos\theta_0$$

$$mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad mu\sqrt{2gL}(\cos\theta \quad \cos\theta_0)^{\frac{3}{2}} \quad mu\sqrt{2gL}(\cos\theta \quad \cos\theta_0)^{\frac{1}{2}}\cos\theta_0$$

$$mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad mu\sqrt{2gL}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}(\cos\theta \quad \cos\theta_0 \quad \cos\theta_0)$$

$$mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad mu\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\cos\theta.$$

$$E_{1p}(t) \quad E_{1p}'(\theta)= mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad mu\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\cos\theta.$$

$$E_1(t) \quad E_{1k}(t) \quad E_{1p}(t) \quad E_{1k}'(\theta) \quad E_{1p}'(\theta)=mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\cos\theta$$

$$mgL(\cos\theta \quad \cos\theta_0) \quad mu\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}\cos\theta \quad \frac{1}{2}mu^2 \text{（常数）}.$$

所以**在小车上观察**时，单摆的机械能守恒，守恒值为

$$\frac{1}{2}mu^2.$$

当 **u**=0 时两个坐标系重合，守恒值相等，符合玻尔的对应原理.

说明：文献[1]和[2]都认为拉力 F 对于小球做功，造成机械能不守恒，这种观点是错误的.通过本文可以看出在单摆问题中绳子的拉力是一个保守力，可以同时改变摆锤的动能和势能，但是不改变摆锤的机械能，与直接计算重力机械能得出的结果一致.

定理：质点做圆周运动的约束力是一个保守力，可以同时改变质点的动能和势能，但是不改变质点的机械能.

在小车系摆锤在最低点的动能和势能分别为：

$$E_{1k}(t) \quad E_{1k}'(\theta) = \frac{1}{2}m(v \quad u)^2 \quad \frac{1}{2}m(v^2 \quad u^2 \quad 2uv) \quad \frac{1}{2}mv^2 \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad muv$$

$$mgL(1 \quad \cos\theta_0) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu\sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}.$$

$$E_{1p}(t) \quad mu\sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}.$$

$E_{1p}(t)=E_{1p}'(\theta) \quad mgL(\cos 0 \quad \cos\theta_0) \quad mu \sqrt{2gL(\cos 0-\cos\theta_0)}\cos 0$

$= \quad mgL(1 \quad \cos\theta_0) \quad mu \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$

与地面系的结果不同，当 u 时与地面系一致，符合玻尔的对应原理

$E_1(t) \quad E_{1k}(t) \quad E_{1p}(t) \quad E_{1k}'(\theta) \quad E_{1p}'(\theta)=$

$$mgL(1 \quad \cos\theta_0) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} \quad mgL(1 \quad \cos\theta_0)$$

$$mu \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad \text{常数} \quad .$$

因此摆锤在最低点的势能不再相等，因为势能的零点发生了变化.

在上面的单摆问题中势能包括重力势能，不是严格意义上的重力势能，因为质点受到的合力不等于重力.由于在本题中摆线的拉力是一个保守力，因此本题是两个保守力共同作用下的机械能守恒问题，摆锤的重力势能+摆线的拉力势能+摆锤的动能=守恒量，在地面系摆锤的拉力势能恒为 0，就成为重力机械能守恒的问题. 在这个问题中，在小车系看来可以认为是重力机械能不守恒，不能认为是机械能不守恒，重力机械能不守恒不等于机械能不守恒.有的力学教材中有这样一个实例——在一个相对于地面匀速上升的电梯底部静止放置一个物体（视为质点）,在电梯内的观察者看来，没有任何力对质点做功，动能和势能（取电梯的底部为势能零点）均为 0，机械能守恒；在地面的观察者看来，电梯底部对于质点的支持力做功，动能不变，势能不断增加（取地面为势能零点），机械能不守恒.其实这种分析是错误的，在地面系看来电梯的支持力也是一个保守力（很容易证明当电梯上升和下降相同的高度时，支持力做功之和为 0，满足保守力定义.），重力势能不断增加，支持力势能不断减少，质点受到的合力为 0，总势能不变，因而机械能守恒，机械能守恒定律满足伽利略变换.

当观察者相对于单摆静止时，利用重力机械能守恒定律得出的结果等效；当观察者相对于单摆的悬挂点匀速运动时，直接利用重力机械能守恒定律是错误的，应该利用保守力所做的功等于势能的减少（势能的定义）来计算.在小车系看来，摆线的拉力并不始终与位移垂直，摆线的拉力也做功，同时改变了摆锤的动能和势能，不改变摆锤的机械能，机械能守恒定律中的保守力应该是保守力的合力，本题中如果按照重力机械能计算显然不满足力学相对性原理，参见文献[1～7]**. 本文的处理方法与文献[8]完全相同.**

参考文献：

1 蔡伯濂．关于力学相对性原理与机械能守恒综述[J]．大学物理，1994，(13)1：20～22．

2 何红雨．机械能守恒定律与惯性参照系的选择[J]．广西物理，1997，(18)3：27～29．

3 金若兴．机械能守恒定律的条件．物理教学，1985 年 1 月．

4 熊秉衡．在不同惯性系中的机械能守恒定律．物理（原名《物理通报》），1964（6）：261～264．

5 施肖铮．在不同惯性系中的机械能守恒定律，常州信息职业学院学报，2002 年 12 月，第 1 卷第 2 期．

6 熊秉衡．“在不同惯性系中的机械能守恒定律”一文的更正与补充．物理（原名《物理通报》），1965（3）：116～117．

7 李伟铎．对“重力机械能守恒定律在各惯性系都成立”的商榷.物理通报（增刊 1），2016（5）：110～112，115．

8 张翠．斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解．物理通报，2016(9)：115～117．

New interpretation of mechanical energy conservation of a natural swinging single pendulum

Abstract：It refurbished the issue of mechanical energy conservation of a natural swinging single pendulum, which straightforwardly led to conclusion, no matter we take reference frame of the earth itself or the cart moving in uniform speed to the earth, the mechanical energy of a natural swinging single pendulum is always conservative.

Key words：the single pendulum；kinetic energy；potential energy；conservation of mechanical energy

5/4/2017