

24. 自然摆动的单摆机械能守恒问题新解

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授, 理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员, 中国民主同盟盟员 (作者为中国科学院高能物理所研究员)

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要: 重新解答了自然摆动的单摆机械能守恒问题, 得出了在地面上和相对于地面做匀速运动的小车上, 单摆的机械能都守恒的新结论.

[李学生 (Li Xuesheng). 24. 自然摆动的单摆机械能守恒问题新解. *Academ Arena* 2017;9(15s): 101-104]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 24. doi:10.7537/marsaaj0915s1724.

关键词: 单摆; 动能; 势能; 机械能守恒

中图分类号: O 313.1 **文献标识码:** A

文章编号:

文献[1]指出“例如单摆悬挂点的约束力, 在某惯性系中不做功, 当变换到另一惯性系时就有可能做功, 这时机械能守恒的陈述就不再满足相对性原理”, 本文就单摆在摆动过程中的机械能守恒问题作进一步研究, 忽略空气阻力等非保守力的作用.

将摆锤质量为 m , 轻质摆线 (摆线质量视为 0) 长度为 L 的单摆挂在与地面相固连的摆架上, 将摆锤从单摆静止时的竖直下垂位置拉至摆角为 θ_0 ($\theta_0 \in [0^\circ, 90^\circ]$) 时自然放手, 在忽略各种阻尼时, 单摆就做自然摆动, θ_0 为最大摆角. 有一小车相对于光滑地面以正常数 u 沿单摆摆动方向向右运动. 试问在地面 (地球质量视为充分大, 故稳定地保持为惯性系) 和小车上观察, 单摆的机械能是否守恒, 并说明理由.

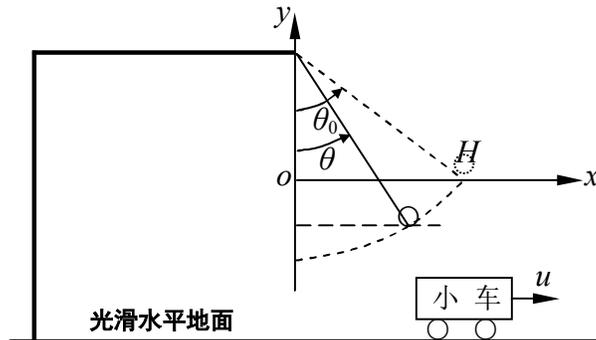


图 1 自然摆动单摆机械能守恒问题新

解: 在地面上观察时, 以过单摆的悬挂点且垂直于水平地面的向上的直线为 y 轴, 以从摆锤的最高点 H 到 y 轴的向右的垂线为 x 轴, 以该垂线的垂足 o 为坐标原点, 建立平面直角坐标系如图 1 所示.

根据运动的对称性, 我们仅需要考察摆锤从右侧的最高点到最低点的过程即可. 由于在摆动过程中摆线的拉力和重力在该直线上的分力与位移垂直不做功, 因此只需考虑重力在切线方向的分力.

设在地面上观察时, 单摆在 $t=0$ 时刻从最大摆角 θ_0 开始摆动, 在 t 时刻的摆角、速度大小、切向加速度大小、动能、势能、机械能分别为: $\theta, v, a, E_k(t), E_p(t), E(t)$; 在小车上观察时, 单摆 t 时刻的速度大小、切向加速度大小、动能、势能、机械能分别为: $v_1, a_1, E_{1k}(t), E_{1p}(t), E_1(t)$. 则在**地面**上观察时有:

$$v \frac{ds}{dt} = \frac{d[L(\theta_0 - \theta)]}{dt} = \frac{-Ld\theta}{dt}, \quad \frac{-Ld\theta}{dt} = v \quad (0 \leq \theta \leq \theta_0).$$

$$mg \sin \theta = ma, \quad g \sin \theta = a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{-Ld\theta} = \frac{-Ld\theta}{dt} = \frac{dv}{-Ld\theta} \quad v, \quad vdv = gL \sin \theta d\theta,$$

$$\int_0^v v \, dv = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} \frac{v^2}{gL(\cos\theta - \cos\theta_0)} \, d\theta = \frac{1}{2} \frac{v^2}{gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{-L} = \frac{1}{L} \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\sqrt{\frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)} < \sqrt{\frac{2g}{L}\cos\theta - 2\frac{g}{L}\cos\theta_0}$$

所以对于一个确定的单摆而言，只要初始状态确定，单摆的摆角是时间 t 的单值函数，因此我们只需证明任意摆角的机械能相等即可，在本题中是减函数。

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = mgL(\cos\theta - \cos\theta_0);$$

$$E_p(t) = mgy = mg(L\cos\theta - L\cos\theta_0) = 0 - mgL(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t) = mgL(\cos\theta - \cos\theta_0) - mgL(\cos\theta - \cos\theta_0) = 0.$$

所以**在地面上观察**时，单摆的机械能守恒，守恒值为 0。

在**小车上观察**时有：

直觉判断：

因为摆锤在最高点以匀速度 u 相对于小车沿 x 轴负向运动，我们规定此时势能为 0，所以在**小车上观察**

时，摆锤的机械能比在**在地面上观察**时增加 $\frac{1}{2}m(u)^2 = \frac{1}{2}mu^2$ ，所以在**小车上观察**时，摆锤的机械能为：

$$E_1(\theta) = E(\theta) + \frac{1}{2}mu^2 = 0 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu^2 \text{ (常数)}.$$

所以在**小车上观察**时，单摆的机械能守恒，守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$ 。

数学推导：

在地面系——设初相为 0, $v = \omega R$,

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases}$$

将运动方程作伽利略变换，写出小车系运动方程：

$$\begin{cases} x_1 = x - ut = R\cos\omega t - ut \\ y_1 = y = R\sin\omega t \end{cases}$$

因此在小车系，轨迹仍然是一个圆，圆心做匀速直线运动，向心力与弧线垂直。

在地面系——设初相为 0, $v = \omega R$,

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases}$$

将运动方程作伽利略变换，写出小车系运动方程：

$$\begin{cases} x_1 = x - ut = R\cos\omega t - ut \\ y_1 = y = R\sin\omega t \end{cases}$$

因此在小车系，轨迹仍然是一个圆，圆心做匀速直线运动，向心力与弧线垂直。

$$v_{1x}^2 = v_x^2 - 2uv\cos\theta + u^2 = v_{1x}^2 - 2u(v_x - u)\cos\theta + u^2 = 2u^2 - 2uv\cos\theta + v_x^2$$

$$v_{1y}^2 = v_y^2 = v_y^2$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 2u^2 - 2uv\cos\theta + v_x^2 + v_y^2$$

$$2gL(\cos\theta - \cos\theta_0) = u^2 - 2u \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)} \cos\theta.$$

$$E_{1k}(t) = E_{1k}'(\theta) = \frac{1}{2} m v_1^2 = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} \mu u^2 = \mu \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta.$$

$$a_{1x} = \frac{dv_{1x}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad a_{1y} = \frac{dv_{1y}}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = a_y; \quad a_1 = a = g \sin \theta.$$

$$m a_{1x} = m a_x; \quad m a_{1y} = m a_y; \quad m a_1 = m a = mg \sin \theta.$$

$$E_{1p}(t) = E_{1p}'(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} m a_1 ds = \int_0^t \left(-m a_1 \cos \theta - m \frac{v^2}{L} \sin \theta \right) (u) dt$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta} mg \sin \theta (L d\theta) = \mu \int_{\theta_0}^{\theta} \left(g \sin \theta \cos \theta + \frac{v^2}{L} \sin \theta \right) \frac{L d\theta}{v}$$

$$= mgL \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = \mu L \int_{\theta_0}^{\theta} \left(g \cos \theta + \frac{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}{L} \right) \frac{d \cos \theta}{\sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

$$= \mu gL \cos \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta} = \mu gL \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \frac{d \cos \theta}{\sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

$$= \frac{3\mu gL}{\sqrt{2gL}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta - \cos \theta_0 + \cos \theta_0 - \frac{2}{3} \cos \theta_0}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$= \frac{3\mu gL}{\sqrt{2gL}} \frac{2}{3} (\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}} = \frac{\mu gL}{\sqrt{2gL}} (\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{1}{2}} \cos \theta_0$$

$$= \mu \sqrt{2gL} (\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}} = \mu \sqrt{2gL} (\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{1}{2}} \cos \theta_0$$

$$= \mu \sqrt{2gL} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} (\cos \theta - \cos \theta_0 \cos \theta_0)$$

$$= \mu \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta.$$

$$E_{1p}(t) = E_{1p}'(\theta) = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) = \mu \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta.$$

$$E_1(t) = E_{1k}(t) + E_{1p}(t) = E_{1k}'(\theta) + E_{1p}'(\theta) =$$

$$mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) + \frac{1}{2} \mu u^2 = \mu \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta$$

$$mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) = \mu \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta = \frac{1}{2} \mu u^2 \quad \text{常数.}$$

所以在小车上观察时，单摆的机械能守恒，守恒值为 $\frac{1}{2} \mu u^2$ 。当 $u=0$ 时两个坐标系重合，守恒值相等，符合玻尔的对对应原理。

说明：文献[1]和[2]都认为拉力 F 对于小球做功，造成机械能不守恒，这种观点是错误的。通过本文可以看出在单摆问题中摆线的约束力是一个保守力，可以同时改变摆锤的动能和势能，但是不改变系统的机械能，与直接计算重力机械能得出的结果一致。

定理：质点做圆周运动的约束力是一个保守力，可以同时改变质点的动能和势能，但是不改变质点的机械能。

$$E_{1p}(t) \quad E_{1p}'(\theta) = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) - \mu \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta$$

$$E_p(t) \quad E_p'(\theta) = mgy \quad E_{pT}(\theta) \quad mg(L \cos \theta_0 - L \cos \theta) \quad 0 \quad mgL(\cos \theta - \cos \theta_0),$$
 若 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 时二者始终相等,符合玻尔的对对应原理;若 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ 时,由于在单摆问题摆角比较小, $\cos \theta \approx \cos \theta_0$, 因此当且仅当 $\cos \theta = \cos \theta_0$ 时势能相等.

科学发展的历史表明,一个成功的理论是来源于科学实验和科学观测,随着观测事实的累积,一方面使理论得到更广泛的证实,另一方面必然会暴露出理论的局限性,从而迫使理论朝着更深刻和更普遍的方向发展。所谓更普遍就是要求新理论能概括更多的观测事实,从而扩大了理论的适用范围,但在旧理论的适用条件下,必然能返回到旧理论所能描述的全部特征,这也是衡量一个理论正确与否的重要判据之一。

在单摆问题中摆锤的势能包括重力势能,不等于重力势能,因为质点受到的合力不等于重力。在本题中摆线的拉力是一个保守力,因此本题是两个保守力共同作用下的机械能守恒问题,摆锤的重力势能+摆锤的拉力势能+摆锤的动能=摆锤机械能的守恒量,在地面系摆锤的拉力势能恒为0,就成为重力机械能守恒的问题。在这个问题中,在小车系看来可以认为是重力机械能不守恒,不能认为是机械能不守恒,重力机械能不守恒不等于机械能不守恒。有的力学教材中有这样一个实例——在一个相对于地面匀速上升的电梯底部静止放置一个物体(视为质点),在电梯内的观察者看来,没有任何力对质点做功,动能和势能(取电梯的底部为势能零点)均为0,机械能守恒;在地面的观察者看来,电梯底部对于质点的支持力做功,动能不变,势能不断增加(取地面为势能零点),机械能不守恒。其实这种分析是错误的,在地面系看来电梯的支持力也是一个保守力(很容易证明当电梯上升和下降相同的高度时,支持力做功之和为0,满足保守力定义),重力势能不断增加,支持力势能不断减少,质点受到的合力为0,总势能不变,因而机械能守恒,机械能守恒定律满足伽利略变换。

当观察者相对于单摆悬挂点静止时,由于摆线的拉力不做功,利用重力机械能守恒定律得出的结果等效;当观察者相对于单摆的悬挂点匀速运动时,直接利用重力机械能守恒定律是错误的,应该利用保守力所做的功等于势能的减少(势能的定义)来计算。在小车系看来,摆线的作用力并不始终与位移垂直,摆线的作用力做功,同时改变了摆锤的动能和势能,不改变摆锤的机械能,机械能守恒定律中的保守力应该是质点受到保守力的合力,本题中如果按照重力机械能计算显然不满足力学相对性原理,参见文献[1~7]。在本文中地面系和小车系在起始时刻的势能零点重合,任何时刻小车系的势能零点是地面系势能零点的伽利略像点,这是相对性原理的要求——各自独立建立坐标系,文献[8]由于不明白力学相对性原理,提出了所谓任何时刻势能零点始终重合的错误假设,从而得出“机械能在一个惯性系守恒,在另一个惯性系不一定守恒”的荒谬结论。本文的处理方法与文献[9]完全相同。

参考文献:

1. 蔡伯濂. 关于力学相对性原理与机械能守恒综述[J]. 大学物理, 1994, (13)1: 20~22.
2. 何红雨. 机械能守恒定律与惯性参照系的选择[J]. 广西物理, 1997, (18)3: 27~29.
3. 金若兴. 机械能守恒定律的条件. 物理教学, 1985年1月.
4. 熊秉衡. 在不同惯性系中的机械能守恒定律. 物理通报, 1964(6): 261~264.
5. 施肖铮. 在不同惯性系中的机械能守恒定律. 常州信息职业学院学报, 2002年12月, 第1卷第2期
6. 熊秉衡. “在不同惯性系中的机械能守恒定律”一文的更正与补充. 物理通报, 1965(3): 116~117.
7. 丘基瑶. 机械能守恒定律与惯性参考系的变换. 佛山科学技术学院学报(社会科学版), 1983(00).
8. 朱如曾. 力场与时间有关系统的功能定理及其应用. 大学物理, 2016(10): 11~16.
9. 张翠. 斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解. 物理通报, 2016(9): 115~117.

Brand-new explanation of mechanical energy conservation of a natural swinging single pendulum

Abstract: It refurbished the issue of mechanical energy conservation of a natural swinging single pendulum, which straightforwardly led to conclusion, no matter we take reference frame of the earth itself or the cart moving in uniform speed to the earth, the mechanical energy of a natural swinging single pendulum is always conservative.

Key words: the single pendulum; kinetic energy; potential energy; conservation of mechanical energy

5/4/2017