

23 自由摆动单摆机械能守恒问题新解

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授, 理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员, 中国民主同盟盟员 (作者为中国科学院高能物理所研究员)

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要: 重新解答了自由摆动的单摆机械能守恒问题, 得出了在地面上和相对于地面做匀速运动的小车上观察, 自由摆动的单摆机械能都守恒的新结论。

[李学生 (Li Xuesheng). 23. 自由摆动单摆机械能守恒问题新解. *Academ Arena* 2017;9(15s): 99-100]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 23. doi:10.7537/marsaaj0915s1723.

关键词: 单摆; 动能; 势能; 机械能守恒

中图分类号: O 313.1

文献标识码: A

将摆锤质量为 m , 轻质摆线 (摆线质量视为 0) 长度为 L 的单摆挂在与地面相固连的摆架上, 将摆锤从单摆静止时的竖直下垂位置拉至摆角为 θ_0 ($\theta_0 \in [0^\circ, 90^\circ]$) 时自然放手, 在忽略各种阻尼时, 单摆就做自然摆动, θ_0 为最大摆角. 有一小车相对于光滑地面以正常数 u 沿单摆摆动方向向右运动. 试问在地面 (地球质量视为充分大, 故稳定地保持为惯性系) 和小车上观察, 单摆的机械能是否守恒, 并说明理由.

解: 设与单摆还未摆动而自然下垂位置重合的竖直直线与水平地面的交点 O 为**地面系**的原点, 点 o 为**小车系**的原点. 设 0 时刻 o 与 O 完全重合, 单摆从摆角 θ_0 开始摆动. 设在 t 时刻, 摆锤与小车 o 的位置如图 1 所示; 摆锤在**小车系**的位矢、速度、加速度、受的力、动能、势能、机械能分别为:

$r, v, a, f, e_k, e_p, e;$

在**地面系**的位矢、速度、加速度、受的力、动能、势能、机械能分别为: R, V, A, F, E_k, E_p, E . 则在**地面系观察**时, 在**地面单摆体系**中, 因为**摆锤**仅受到**地球重力**和**向心力**的作用, 向心力与位移始终垂直不做功, **摆锤的机械能** E 守恒, 即 $E = D$ 常数, 亦即 $dE = dD = 0$.

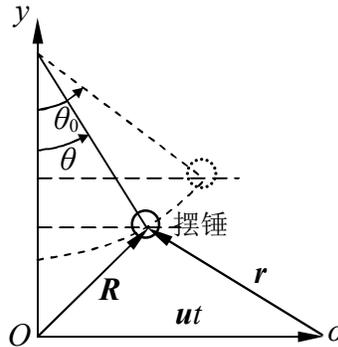


图 1 自由摆动单摆机械能守恒问题新解

据伽利略变换或图 1 知:

$$R = r + ut, \quad V = v + u, \quad A = a + 0, \quad F = mA = ma + f.$$

$$V^2 = V \cdot V = (v + u) \cdot (v + u) = v \cdot v + 2v \cdot u + u \cdot u = v^2 + 2u \cdot v + u^2,$$

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m u \cdot v + \frac{1}{2} m u^2, \quad E_k = e_k + m u \cdot v + C,$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{de_k}{dt} + m u \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dC}{dt} = \frac{de_k}{dt} + m u \cdot \frac{dv}{dt} + 0 = \frac{de_k}{dt} + f \cdot u dt.$$

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{dE_p}{dt} = F \cdot \frac{dR}{dt} = f \cdot \frac{d(r + ut)}{dt} = f \cdot \frac{dr}{dt} + f \cdot \frac{d(ut)}{dt} = \frac{de_p}{dt} + f \cdot u dt.$$

$$dE_k = dE_p = de_k = f \cdot u dt = de_p = f \cdot u dt = de_k = de_p, d(e_k - e_p) = d(E_k - E_p), de = dE = 0.$$

所以，在小车系观察时，摆锤的机械能守恒。

设在 $t=0$ 时刻摆锤位于最高点，此时为地面系和小车系的公共势能 0 点，则：

$$E_k(0) = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = 0, E_p(0) = 0, E(t) = E_k(t) + E_p(t) = E_k(0) + E_p(0) = 0 + 0 = 0.$$

$$e_k(0) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (u)^2 = \frac{1}{2} m u^2, e_p(0) = 0, e(t) = e_k(t) + e_p(t) = e_k(0) + e_p(0) = \frac{1}{2} m u^2 + 0 = \frac{1}{2} m u^2.$$

在上面的单摆问题中势能包括重力势能，不是严格意义上的重力势能，因为质点受到的合力不等于重力。在本题中摆线的拉力是一个保守力，因此本题是两个保守力共同作用下的机械能守恒问题，摆锤的重力势能+摆锤的拉力势能+摆锤的动能=摆锤机械能的守恒量，在地面系摆锤的拉力势能恒为 0，就成为重力机械能守恒的问题。在这个问题中，在小车系看来可以认为是重力机械能不守恒，不能认为是机械能不守恒，重力机械能不守恒不等于机械能不守恒。有的力学教材中有这样一个实例——在一个相对于地面匀速上升的电梯底部静止放置一个物体（视为质点），在电梯内的观察者看来，没有任何力对质点做功，动能和势能（取电梯的底部为势能零点）均为 0，机械能守恒；在地面的观察者看来，电梯底部对于质点的支持力做功，动能不变，势能不断增加（取地面为势能零点），机械能不守恒。其实这种分析是错误的，在地面系看来电梯的支持力也是一个保守力（很容易证明当电梯上升和下降相同的高度时，支持力做功之和为 0，满足保守力定义。），重力势能不断增加，支持力势能不断减少，质点受到的合力为 0，总势能不变，因而机械能守恒，机械能守恒定律满足伽利略变换。

当观察者相对于单摆静止时，利用重力机械能守恒定律得出的结果等效；当观察者相对于单摆的悬挂点匀速运动时，直接利用重力机械能守恒定律是错误的，应该利用保守力所做的功等于势能的减少来计算。在小车系看来，摆线的作用力并不始终与位移垂直，摆线的作用力也做功，同时改变了摆锤的动能和势能，不改变摆锤的机械能，机械能守恒定律中的保守力应该是保守力的合力，本题中如果按照重力机械能计算显然不满足力学相对性原理，参见文献[1~9]。

参考文献：

- 1 蔡伯濂. 关于力学相对性原理与机械能守恒综述[J]. 大学物理, 1994, (13)1: 20~22.
- 2 何红雨. 机械能守恒定律与惯性参照系的选择[J]. 广西物理, 1997, (18)3: 27~29.
- 3 高炳坤. 力学中一个诡秘的错误[J]. 物理与工程, 2002, (12)2: 14 15, 30.
- 4 赵 坚. 机械能守恒定律理解中一个值得重视的问题[J]. 物理通报, 2006, (25)6: 19~21.
- 5 钱广东. 不同惯性系中机械能不一定都守恒——兼谈机械能守恒定律是否服从力学相对性原理[J]. 物理教学, 2006, (28)2: 42 43.
- 6 白静江. 两体问题中的功能原理及机械能守恒定律[J]. 大学物理, 1997, (16)3: 11~14.
- 7 孙国标, 杨丽芬. 也谈机械能守恒的相对性[J]. 物理教师, 2006, (27)12: 32~33.
- 8 熊秉衡. 在不同惯性系中的机械能守恒定律[J]. 物理通报（即现在的《物理》）, 1964（6）: 261~264.
- 9 熊秉衡. “在不同惯性系中的机械能守恒定律”一文的更正与补充, 物理通报（即现在的《物理》）, 1965（3）: 116~117.
- 10 李伟铎. 对“重力机械能守恒定律在各惯性系都成立”的商榷. 物理通报（增刊 1）, 2016（5）: 110~112, 115.

Brand-new explanation of mechanical energy conservation of the single pendulum free swinging

Abstract: It refurbished the issue of mechanical energy conservation of the single pendulum free swinging, which straightforwardly led to conclusion, no matter we take reference frame of the earth itself or the cart moving in uniform speed to the earth, the mechanical energy of the single pendulum free swinging is always conservative.

Key words: the single pendulum; kinetic energy; potential energy; conservation of mechanical energy