22. 斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师，中国管理科学院学术委员会特约研究员，北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘　要：重新解答了斜面上下滑滑块机械能守恒问题，得出了在地面上和相对于地面做匀速运动的小车上，下滑滑块机械能都守恒的新结论.

[李学生 (Li Xuesheng). 22**. 斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解.** *Academ Arena* 2017;9(15s): 95-98]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 22. doi:10.7537/marsaaj0915s1722.

关键词：斜面上下滑滑块；动能；势能；机械能守恒

中图分类号：O 313.1　　　　**文献标识码**：A

在水平地面上筑一表面光滑的斜坡，坡高为 h，坡面与水平地面的夹角为 θ．最初，有一质量为 m 的滑块（视为质点）静止在斜坡的最高处．时间 t 等于 0 时，滑块从斜坡的最高处沿斜坡自由滑下，同时有一小车相对于地面以恒速量值 u 向右运动．试问在地面（地球质量视为充分大，故稳定地保持为惯性系）和小车上观察，滑块的机械能是否都守恒，并说明理由．忽略滑动摩擦力和空气阻力等非保守力作用.

解：在地面系看来，由于斜面的支持力始终不做功，因此小滑块在斜面上运动回到出发点时支持力做功始终等于 0，因此在地面系看来支持力是一个保守力，又因为重力也是一个保守力，因此它们的合力也是一个保守力.由于力是一个伽利略变换的不变量，因此在小车系看来滑块受到的合力也是一个保守力，本文从合力的角度研究这个问题.

在地面上观察时，以坡面顶点 o 为坐标原点，以过 o 且垂直于水平地面的向上的直线为 y 轴，以过 o 且垂直于 y 轴的向右的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系如图 1 所示．设最高点的势能为 0.

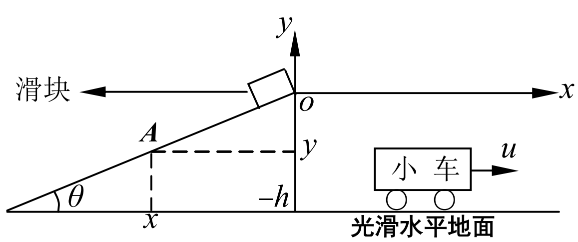

图 1　斜面下滑滑块机械能守恒问题新解

设滑块 t 时刻的高度、速度、加速度、动能、势能、机械能分别为：y，v，a，$E_k(t)$，$E_p(t)$，$E(t)$，假设小滑块从顶端滑道底端所用时间为 T，$t \le T$；在**小车上观察**时，滑块 t 时刻的高度、速度、加速度、动能、势能、机械能分别为：

y_1，v_1，a_1，$E_{1k}(t)$，$E_{1p}(t)$，$E_1(t)$.

则在**地面**上观察时有：

$$mg\sin\theta \quad ma,\quad \frac{dv}{dt} \quad a \quad g\sin\theta,\ dv \quad g\sin\theta dt,\ \int_0^v dv \quad g\sin\theta\int_0^t dt,\ v \quad 0 \quad (t \quad 0)g\sin\theta,\ v \quad tg\sin\theta.$$

$$\frac{ds}{dt} \quad v \quad tg\sin\theta,\ ds \quad tg\sin\theta dt,\ \int_0^s ds \quad g\sin\theta\int_0^t tdt,\ s \quad 0 \quad \frac{1}{2}(t^2 \quad 0^2)g\sin\theta,\ s \quad \frac{1}{2}t^2 g\sin\theta.$$

$0 \quad y \quad s\sin\theta \quad \frac{1}{2}t^2 g\sin\theta\sin\theta \quad \frac{1}{2}t^2 g\sin^2\theta$（ $h \leqslant y \leqslant 0$），$t^2 \quad \frac{-2y}{g\sin^2\theta}$，$t \quad \frac{\sqrt{-2y}}{\sqrt{g\sin\theta}}$；$s \quad \frac{-y}{\sin\theta}$.

$v \quad \frac{\sqrt{-2y}}{\sqrt{g\sin\theta}} g\sin\theta \quad \sqrt{-2gy}$，$v^2 \quad 2gy$. $v_x \quad \sqrt{-2gy}\cos\theta$.

$E_k(t) \quad E_k(y)= \frac{1}{2}mv^2 \quad \frac{1}{2}m \quad (\quad 2gy) \quad mgy$；

$E_p(t) \quad E_p{}'(y)=mgy$ 或 $E_p(t) \quad E_p{}'(y)=0 \quad ma \quad s \quad (mg\sin\theta) \quad \frac{-y}{\sin\theta} \quad mgy$.

$E(t) \quad E_k(t) \quad E_p(t) \quad E_k{}'(y) \quad E_p{}'(y)= \quad mgy \quad mgy \quad 0$ 常数.

所以，在地面上观察时，滑块的机械能守恒，守恒值为 0.

在小车参照系上观察时：

直觉判断：

因为滑块在最高点以匀速度 u 相对于小车沿 x 轴负向运动，我们规定此时的势能为 0，所以在小车参照系上观察（即以小车参照系为静止系）时，滑块的机械能比在在地面参照系上观察时增加 $\frac{1}{2}m(\quad u)^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$，所以**在小车参照系上观察**时，**滑块**的机械能为：

$E_1(t) \quad E(t) \quad \frac{1}{2}mu^2 = E'(y) \quad \frac{1}{2}mu^2$（常数）.

所以**在小车参照系上观察**时，**滑块**的机械能守恒，守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$.

数学推导： $v_{1x} \quad v_x \quad u$，$v_{1x}^2 \quad (v_x \quad u)^2 \quad v_x^2 \quad u^2 \quad 2uv_x$；$v_{1y} \quad v_y$，$v_{1y}^2 \quad v_y^2$.

$v_1^2 \quad v_{1x}^2 \quad v_{1y}^2 \quad v_x^2 \quad u^2 \quad 2u \quad v_x \quad v_y^2 \quad v^2 \quad u^2 \quad 2u \quad v_x \quad 2gy \quad u^2 \quad 2u \quad \sqrt{-2gy}\cos\theta$.

$E_{1k}(t) \quad E_{1k}{}'(y)= \frac{1}{2}mv_1^2 \quad mgy \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu \quad \sqrt{-2gy}\cos\theta$.

$a_{1x} \quad \frac{dv_{1x}}{dt} \quad \frac{dv_x}{dt} \quad 0 \quad a_x$，$a_{1y} \quad \frac{dv_{1y}}{dt} \quad \frac{dv_y}{dt} \quad a_y$；$a_1 \quad a \quad g\sin\theta$.

$m a_{1x} \quad m a_x$；$m a_{1y} \quad m a_y$；$ma_1 \quad ma \quad mg\sin\theta$.

$0 \quad E_{1p}(t) \quad E_{1p}{}'(y) =$

$(ma_1\sin\theta) \quad s \quad (\quad ma_1\sin\theta\cos\theta) \quad (\quad u)(t \quad 0) \quad (mg\sin\theta) \quad \frac{-y}{\sin\theta} \quad (mg\sin\theta\cos\theta) \quad u \quad \frac{\sqrt{-2y}}{\sqrt{g\sin\theta}}$

$mgy \quad mu \quad \sqrt{-2gy}\cos\theta$. $E_{1p}(t) \quad E_{1p}{}'(y) = \quad mgy \quad mu \quad \sqrt{-2gy}\cos\theta$.

$E_1(t) \quad E_{1k}(t) \quad E_{1p}(t) \quad E_{1k}{}'(y) \quad E_{1p}{}'(y)=$

$mgy \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu \quad \sqrt{-2gy}\cos\theta \quad mgy \quad mu \quad \sqrt{-2gy}\cos\theta \quad \frac{1}{2}mu^2$ 常数.

所以**在小车参照系上观察**时，**滑块**的机械能守恒，守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$. 当 **u**=0 时两个坐标系重合，守恒值相等，符合对应原理的要求.

说明：$E_{1p}(t)$ $E_{1p}'(y)$= mgy mu $\sqrt{-2gy}$ $\cos\theta$ 和 $E_p(t)$ $E_p'(y)$= mgy 并不始终相等，当 u≠0 时，当且仅当 y=0 时相等，也就是说只有初始状态时相等，主要是由于小车系在合力的分力方向上位移不是始终等于 0;当 u=0 时二者始终相等，这也符合对应原理的要求.在滑块滑到底端时，小车系测量的势能为 -mgh-mu $\sqrt{2gh}$ $\cos\theta$，地面系测量的势能为-mgh.在斜面问题中斜面的支持力和重力垂直于斜面方向的分力的合力是约束力，这样在地面系和小车系测量约束力做功之和为 0，约束力不改变滑块的机械能，只需考察重力沿平行于斜面方向的分力即可.如果观察者沿着合力的垂直方向匀速运动，则它们始终相等，等于 mgh，请读者自己证明.

解法 2：据伽利略变换或图 2 知：

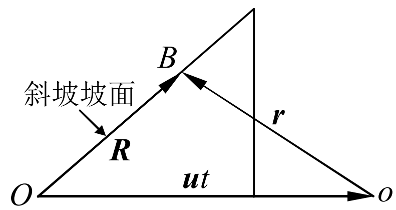

图 2 斜面下滑滑块机械能守恒问题新解

$\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{u}t$，$\boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{F}\quad m\boldsymbol{A}\quad m\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{f}$.

$V^2\quad \boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{V}\quad (\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u})\quad (\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u})\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\quad 2\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\quad v^2\quad 2\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad u^2$，

$\frac{1}{2}mV^2\quad \frac{1}{2}mv^2\quad m\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad \frac{1}{2}mu^2$，$E_k\quad e_k\quad m\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad C$，

$\mathrm{d}E_k\quad \mathrm{d}e_k\quad m\boldsymbol{u}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{v}\quad \mathrm{d}C\quad \mathrm{d}e_k\quad \boldsymbol{u}\quad m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\quad 0\quad \mathrm{d}e_k\quad \boldsymbol{f}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t$.

$\mathrm{d}E_p\quad \boldsymbol{F}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{f}\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{u}t)\quad \boldsymbol{f}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad \boldsymbol{f}\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}t)\quad \mathrm{d}e_p\quad \boldsymbol{f}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t$.

$\mathrm{d}E_k\quad \mathrm{d}E_p\quad \mathrm{d}e_k\quad \boldsymbol{f}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t\quad \mathrm{d}e_p\quad \boldsymbol{f}\quad \boldsymbol{u}\mathrm{d}t\quad \mathrm{d}e_k\quad \mathrm{d}e_p$，$\mathrm{d}(e_k\quad e_p)\quad \mathrm{d}(E_k\quad E_p)$，$\mathrm{d}e\quad \mathrm{d}E\quad 0$.

所以**在小车系观察**时，**滑块的机械能**守恒．由于在小车系看来滑块在最高点的机械能为 $\frac{1}{2}mu^2$，因此守恒量为 $\frac{1}{2}mu^2$.

在上面的斜面问题中势能只能说是类重力势能（相当于把重力缩小为 $mg\sin\theta$，然后旋转一个角度），不是重力势能，因为质点受到的合力不等于重力.当观察者相对于斜面静止时，利用重力机械能守恒定律得出的结果等效,以至于人们发生误解——斜面问题中的机械能守恒问题就是重力机械能问题；当观察者相对于斜面匀速运动时，直接利用重力机械能守恒定律是错误的，应当利用势能定义（保守力所做的功等于势能的减少）来计算.在地面系和小车系计算的机械能都守恒，进一步验证了斜面的支持力是一个保守力.斜面的支持力也是由于形变产生的，也是弹力，忽略形变的话就是保守力.本题也可以按照两个保守力分别分析.机械能守恒定律中的保守力应该是保守力的合力，不存在内力和外力之分，对于质点而言都是外力，可以分为保守力和非保守力，本题中如果按照重力机械能计算显然不满足力学相对性原理.在这个问题中，在小车系看来可以认为是重力机械能不守恒，不能认为是机械能不守恒，重力机械能不守恒不等于机械能不守恒.有的力学教材中有这样一个实例——在一个相对于地面匀速上升的电梯底部静止放置一个物体（视为质点），在电梯内的观察者看来，没有任何力对质点做功，动能和势能（取电梯的底部为势能零点）均为 0，机械能守恒；在地面的观察者看来，电梯底部对于质点的支持力做功，动能不变，势能不断增加（取地面为势能零点），机械能不守恒.其实这种分析是错误的，在地面系看来电梯的支持力也是一个保守力（很容易证明当电梯上升和下降相同的高度时，支持力做功之和为 0，满足保守力定义.），重力势能不断增加，支持力势能不断减少，质点受到的合力为 0，总势能不变，因而机械能守恒，机械能守恒定律满足伽利略变换.

文献[11]看作是重力机械能问题，此时必须在地面系和小车系都减去支持力的功，处理就非常复杂了.

参考文献[1～7]和文献[13～14]一直认为斜面问题是重力机械能守恒问题，因此得出了小车系机械能不守恒的错误.参考文献[8～9]认为机械能守恒定律满足力学相对性原理但是不具有单独的协变性，因为系统的外力在一个惯性系可能不做功，在另一个惯性系可能做功，功具有相对性.在这里作者忽略了一个问题，如果系统的外力在一个惯性系不做功，那么系统的内力一定存在一个分力与之是平衡力，该力在这个惯性系中也不做功；在另一个惯性系中系统的外力尽管做功，但是它的平衡力也在做功，而且它们做的功互为相反数，代数和为 0，不改变系统的机械能.换句话说，质点所受到的合外力在两个惯性系中相同，在一个惯性系中机械能守恒，在另一个惯性系中机械能也守恒，研究机械能守恒问题应该研究保守力的合力,因此本文就研究滑块受到的合力（保守力），参考文献[8～9]的观点是完全错误的. 这个问题在国际上也比较纠结[15].

参考文献：

1. 高炳坤．力学中一个诡秘的错误[J]．物理与工程，2002，(12)2：14～15，30．
2. 赵 坚．机械能守恒定律理解中一个值得重视的问题[J]．物理通报，2006，(25)6：19～21．
3. 钱广东．不同惯性系中机械能不一定都守恒——兼谈机械能守恒定律是否服从力学相对性原理[J]．物理教学，2006，(28)2：42～43．
4. 白静江. 两体问题中的功能原理及机械能守恒定律［J］，大学物理，1997，（16）3:11～14.
5. 冯 健．滑块的机械能还守恒吗[J]．物理教学探讨，2006，(24)1：43．
6. 徐祥宝．以地面为参照系机械能不守恒[J]．物理教学探讨，2006，(24)9：36～37．
7. 孙国标，杨丽芬．也谈机械能守恒的相对性[J]．物理教师，2006，(27)12：32～33．
8. 朱如曾，相对性原理及其对自然界定律的协变性要求，大学物理，2000 年，19（2）：15～19.
9. 朱如曾. 相对性原理对普遍定律和非普遍定律参考系变换性质的不同要求---关于协变性疑难的进一步讨论.大学物理，2002 年，21（3）：19～23.
10. 张申如，孙松庚.作用力与反作用力作功之和与参照系无关的一种证明，大学物理，1986（01）.
11. 赵文桐，刘文芳，刘明成.重力机械能在各惯性系都成立，物理通报，2015（3）.
12. 郑民伟. 关于机械能定理与惯性参照系的选取，重庆师范学院学报（自然科学版），1999（6）：115～116.
13. 李伟铎. 对“重力机械能守恒定律在各惯性系都成立”的商榷.物理通报（增刊 1），2016：110～112，115.
14. 吴英. 关于“机械能守恒定律与参考系的选择”的进一步探讨.理科考试.综合版，2016（6）：45.
15. Santos FC, Soares V and Tort AC. A note on the conservation of mechanical energy and the Galilean principle of relativity[J]. European Journal of Physics. 2010,31(4):827 834．

New interpretation of mechanical energy conservation in the process of a block sliding down a incline

Abstract：It refurbished the issue of mechanical energy conservation of a block sliding down on incline, which straightforwardly led to conclusion, no matter we take reference frame of the earth itself or the cart moving in uniform speed to the earth, the mechanical energy of a block sliding down on incline is always conservative.

Key words：a block sliding down on incline；kinetic energy；potential energy；conservation of mechanical energy

5/4/2017