

20. 匀速圆周运动中的机械能守恒问题

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师，中国管理科学院学术委员会特约研究员，北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要：重新解答了匀速圆周运动物体的机械能守恒问题，得出了在地面上和相对于地面做匀速运动的小车上，匀速圆周运动物体机械能都守恒的新结论。

[李学生 (Li Xuesheng). 20. 匀速圆周运动中的机械能守恒问题. *Academ Arena* 2017;9(15s): 89-91]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 20. doi:10.7537/marsaaj0915s1720.

关键词：匀速圆周运动物体；动能；势能；机械能守恒

如下图，有一质量为 m 的小球（视为质点），在轻绳的牵制下，在光滑的地面上绕 O 点做匀速（速率为 v ）圆周运动，如果忽略地面和空气摩擦阻力，问：小球在地面系（地球质量视为充分大，故稳定地保持为惯性系）和沿 x 轴匀速运动的小车（设小车的速度为 u ）坐标系($O_1-x_1y_1$)，机械能是否都守恒？

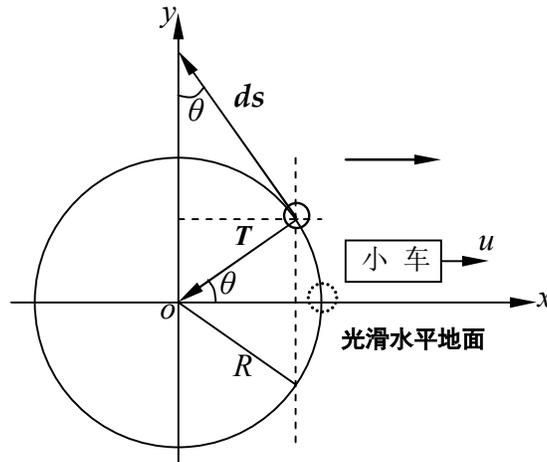


图1 匀速圆动物体机械能守恒问题新解

解析：地球质量视为充分大，故稳定地保持为惯性系。

1、在地面系——设初相为 0, $v=\omega R$,

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y=R\sin\omega t \\ x'=-R\omega\sin\omega t \\ y'=R\omega\cos\omega t \\ x''=-R\omega^2\cos\omega t, \\ y''=-R\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x=m x''=-mR\omega^2\cos\omega t \\ f_y=m y''=-mR\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

$$E_k(t)=\frac{1}{2} m (x'^2+y'^2)=\frac{1}{2} m R^2\omega^2.$$

$$dE_p(t)= - f_x dx - f_y dy = mR\omega^2 \cos\omega t d(R\cos\omega t) + mR\omega^2 \sin\omega t d(R\sin\omega t)$$

$$=d\left(\frac{1}{2}mR^2\omega^2\cos^2\omega t+\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\omega t\right)=0.$$

$$\text{设 } E_p(t)=0, \text{ 所以 } E(t) = E_p(t) + E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2.$$

这说明在地面系机械能守恒, 恒量为 $\frac{1}{2}mv^2$.

2、小车系

直觉判断:

因为当质点的运动速度为垂直于 x 轴时, 我们规定此时地面系与小车系的势能相等, 与地面系比较可

以得出质点的动能增加 $\frac{1}{2}m(u)^2 = \frac{1}{2}mu^2$, 所以在小车系看来, 质点的机械能为:

$$E_1(t) = E(t) + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 \text{ (常数)}.$$

所以, 对于小车系上, 质点的机械能守恒, 守恒值为 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mu^2$.

数学推导:

将运动方程作伽利略变换, 写出小车系运动方程:

$$\begin{cases} x_1 = x - ut = R\cos\omega t - ut \\ y_1 = y = R\sin\omega t \\ x'_1 = x' - u = -R\omega\sin\omega t - u \\ y'_1 = y' = R\omega\cos\omega t \\ x''_1 = x'' = -R\omega^2\cos\omega t \\ y''_1 = y'' = -R\omega^2\sin\omega t \\ f_{x1} = f_x = m x'' = -mR\omega^2\cos\omega t \\ f_{y1} = f_y = m y'' = -mR\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

$$E_{k1}(t) = \frac{1}{2}m(x_1'^2 + y_1'^2) = \frac{1}{2}m(-R\omega\sin\omega t - u)^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mu^2 + mRu\omega\sin\omega t.$$

$$dE_{p1}(t) = -f_x dx_1 - f_y dy_1 = mR\omega^2\cos\omega t d(R\cos\omega t - ut) + mR\omega^2\sin\omega t d(R\sin\omega t)$$

$$=d\left(\frac{1}{2}mR^2\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\omega t - mRu\omega\sin\omega t\right) = d\left(\frac{1}{2}mR^2\omega^2 - mRu\omega\sin\omega t\right).$$

$$E_{p1}(t) = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - mRu\omega\sin\omega t. \text{ 当 } u=0 \text{ 时, 地面系与小车系的势能相等, 也符合玻尔的对对应原理.}$$

$$\text{所以 } E_1(t) = E_{p1}(t) + E_{k1}(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mu^2.$$

这说明在沿 x 方向匀速运动的小车系机械能也是守恒的, 恒量为 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mu^2$, 当然两个守恒量不相等,

比地面系多出 $\frac{1}{2}mu^2$. 当 $u=0$ 时两个坐标系重合, 守恒值相等, 符合玻尔的对对应原理.

定理: 只有当质点受到的约束力是一个保守力时才可能做匀速圆周运动, 此时约束力可以同时改变动能和势能, 但是不改变质点的机械能.

在本题中的约束力是弹力, 进一步验证了弹力是保守力, 类似于弹簧振子约束力和保守力是同一个力, 不过在这里轻绳可以看做劲度系数是无穷大的弹簧, 忽略形变.

有的力学教材中有这样一个实例——在一个相对于地面匀速上升的电梯底部静止放置一个物体(视为质

点),在电梯内的观察者看来,没有任何力对质点做功,动能和势能(取电梯的底部为势能零点)均为0,机械能守恒;在地面的观察者看来,电梯底部对于质点的支持力做功,动能不变,势能不断增加(取地面为势能零点),机械能不守恒.其实这种分析是错误的,在这里约束力也是一个保守力,重力势能不断增加,约束力势能不断减少,质点受到的合力为0,总势能不变,因而机械能也不变,在这个问题中机械能守恒定律满足力学相对性原理.

说明:前面我们分析了单一一个保守力做功时,机械能守恒定律满足力学相对性原理,分为重力、弹力(弹簧弹力、匀速圆周运动的约束力)、万有引力,其实静摩擦力也是保守力^[1](因为静摩擦力在一个惯性系内不做功,在另一个惯性系内可能做功,我们也可以按照保守力来处理),斜面的支持力^[2~3]、摆线的拉力、匀速圆周运动的约束力、理想流体的压力、弹性碰撞中的弹力以及浮力等,此时机械能守恒定律也满足力学相对性原理,我们不再分析,有兴趣的读者自己分析即可.文献[4]验证了约束力是一个保守力.

参考文献:

- 1 赵凯华, 罗蔚茵, 新概念物理教程, 高等教育出版社, 2004 年第二版, 113~114.
- 2 张翠. 斜面上下滑块机械能守恒问题新解. 物理通报, 2016(9): 115~117.
- 3 赵文桐, 刘文芳, 刘明成. 重力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]. 物理通报, 2015(3): 96~98.
- 4 李有为. 受光滑约束系统的机械能守恒问题. 郑州工学院学报, 1989 (9) : 91~94.

Brand-new explanation of mechanical energy conservation of object moving in even speed around circle

Abstract: It refurbished the issue of mechanical energy conservation of the object moving in uniform speed around circle, which straightforwardly led to conclusion, no matter we take reference frame of the earth itself or the cart moving in uniform speed to the earth, the mechanical energy of the object moving in uniform speed around circle is always conservative.

Key words: the object moving in uniform speed around circle; kinetic energy; potential energy; conservation of mechanical energy

5/4/2017