15. 就《对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷》一文的讨论

陈奎孚

(中国农业大学理学院 74#，北京 100083)

摘要师教民等作者对 2009 年一道中学生物理竞赛试题的参考答案进行了商榷，并对朱如曾再商榷文章进行了答复。笔者就师教民等作者的文章中有关问题进行了讨论，指出在动参考系下，弹簧的势能是弹簧两端位移的二元函数，其全微分应包括全部端点的贡献，而师教民等人的失误是未考虑远离小球一端位移的贡献。此外，相关文章对“力的传递”、“功”，“变形体”、“弹性势能”等基本力学概念的理解也有不妥之处，本文也将略加评述。

[陈奎孚。**15. 就《对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷》一文的讨论。** *AcademArena*2017;9(15s):61-68].(ISSN1553-992X).http://www.sciencepub.net/academia.15.doi:10.7537/marsaaj0915s1715.

关键词：物理竞赛；动参考系；惯性系；势能；全微分；机械能；机械能守恒

Remarkson‘Discussionontheanswerofamiddleschoolstudent’scontestquestion”

Chen Kui Fu

(College of Science #74，China Agricultural University，Beijing 100083)

Abstract: Shi Jiao-ming et al. Published a paper discussing the solution to a problem from the 2009 middle school student’s physics competition of China. Zhu Ru-zeng disagreed with SHI Jiao-ming’s opinion and presented a commentary paper. Shi Jiao-ming already presented a reply rebutting against Zhu Ru-zeng’s comments. In this paper，I will remark on the Shi Jiao-ming’s initial and rebuttal papers. It will be pointed out that the elastic potential of a spring observed from a moving frameisabi-variatefunctionwithrespecttobothdisplacementsoftwospringends. The exact differential should cover contributions from both ends, and the mistake made by SHI Jiao-ming et al. is losing the contribution from the end distal to the oscillating particle. Besides， some fundamental mechanics concepts， for example，force transmissibility，work，transformable body，elastic potential，were misunderstood by some authors，and will be remarked concisely.

Keyword: physics competition; moving reference system; inertial frame; potential energy; exact differential; mechanical energy; conservation of mechanical energy

0．话题

李学生和师教民近期发表了一篇针对2009年第26届全国中学生物理竞赛复赛试卷第三题第1小题的标准答案的商榷文章[1]，引起的反响很大，如东北师范大学物理学院教授孟昭辉对文[1]的错误进行了剖析[2]，曾任力学进展常务副主编的朱如曾先生再商榷了文[1][3]，随后原文作者之一师教民对文[3]进行了反驳[4]。郑金用特殊情形否定了文[1]的观点[5]。因文[1]所讨论的话题曾经争议了五十多年[6,7]，所以它发表后立即受到了正面引用[8]。笔者与文[2]和文[3]的看法一致，即文[1]的观点是不妥的。本来文[2]和[3]的讨论已经很到位了，然而笔者还是想就自己的认识对文[1]和文[4]中的相关说辞进行一番讨论，这有如下原因。首先，机械能守恒是物理和力学中很基本问题，影响面太广(如文[8]对文[1]的迅速的正面引用)，容不得错误和模糊;其次，有文[4]的“言之凿凿”的反驳需要辨析；第三，笔者不想让学生、学者和教师等感兴趣者浪费有限的时间和精力。

原竞赛题为：一质量为 m 的小球与一劲度系数为 k 的弹簧相连组成一体系，置于光滑水平桌面上，弹簧的另一端与固定墙面相连，小球做一维自由振动。试问：在一沿此弹簧长度方向以速度 $\boldsymbol{u}$ 做匀速运动的参考系里观察，此体系的机械能是否守恒，并说明理由。

参考答案为：否。原因是墙壁对于该体系而言是外界，墙壁对弹簧有作用力，在运动参考系里此力的作用点有位移，所以对体系做功，从而改变这一体系的机械能。

试题除了“以速度 $\boldsymbol{u}$ 做匀速运动的参考系”这个表述外都很清楚。如果能表述说“相对地面以速度 $\boldsymbol{u}$ 做匀速运动的参考系”，则会更明确。不过，争议双方都已经默认了“相对地面”，并无分歧。参考答案是

正确无误的。

1．全微分不全

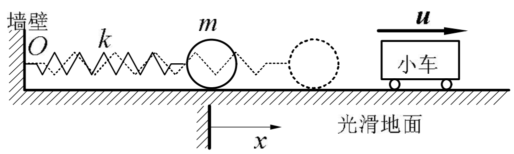

图 1

文[1]认为参考答案是错误的，论证的手段是数学演绎，然而该演绎有一个关键失误，即文[1]式(4)下方的(本段随后叙述根据文[1])

$$\mathrm{d}E'_{\mathrm{p}}(t)=-f\mathrm{d}x' \quad (1)$$

式中：$E'_{\mathrm{p}}(t)$，x'，$\mathrm{d}x'$ 分别是匀速运动参考系中观察到弹簧势能，小球位移和位移的微分；$\mathrm{d}E'_{\mathrm{p}}(t)$ 为弹性势能的微元；$f=kx$ 为小球所受到的力。

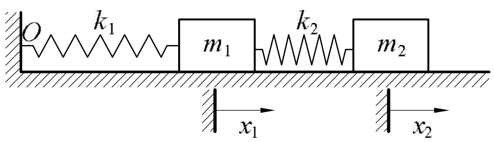

图 2

如果动参考系的速度 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$，那么 x' 就回到了 x (见图 1)，式(1)无疑是正确的，但是如果 x' 的坐标原点也在运动，那么再使用式(1)就不合适了。比如图 2 的两个自由度系统，第二个弹簧 k_2 的势能 $E_{\mathrm{p2}}(t)$ 按照式(1)的逻辑究竟应该为 $\mathrm{d}E_{\mathrm{p2}}(t)=-f\mathrm{d}x_1$ (此处$f=k_2(x_2-x_1)$) 还是 $\mathrm{d}E_{\mathrm{p2}}(t)=-f\mathrm{d}x_2$ 呢？显然二者都不对。$E_{\mathrm{p2}}(t)$ 应该 x_1 和 x_2 的二元函数(其实势能应该写成 $E_{\mathrm{p2}}(x_1,x_2)$，并进一步可以表示成单变量函数 $E_{\mathrm{p}}(x_2-x_1)$ 的形式，但是为了与文[1]的符号一致，还是用了 $E_{\mathrm{p2}}(t)$)，它的全微分应该为

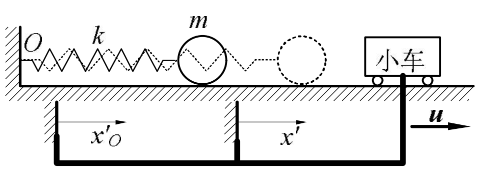

图 3

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p2}}=\frac{\partial E_{\mathrm{p2}}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial E_{\mathrm{p2}}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \quad (2)$$

回到图 1 的模型，在动参考系里观察，弹簧的左端 O 不再保持不动，如图 3 所示模型。在图 3 中，弹簧左右两个端点各有一个参考原点，这两个原点随动参考系一起匀速运动。左右两个端点相对动参考系的位移分别为 x'_O 和 x'。如同图 2，在动参考系中观察到的弹簧势能 $E'_{\mathrm{p}}(t)$ 是 x' 和 x'_O 的函数，即 $E'_{\mathrm{p}}(t)=k(x'-x'_O)^2/2$，所以

$$\mathrm{d}E'_{\mathrm{p}}=\frac{\partial E'_{\mathrm{p}}}{\partial x'}\mathrm{d}x'+\frac{\partial E'_{\mathrm{p}}}{\partial x'_O}\mathrm{d}x'_O \quad (3)$$

其中的 $\dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}'}{\partial x'} = k(x' - x_O'), \dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}'}{\partial x_O'} = k(x_O' - x')$。

式(1)失误在于把式(3)右边的第二项丢掉了，它正是墙壁作用力对系统所做的元功。第二项的存在，是动参考系中机械能不守恒的数学表现。高炳坤先生早就论述过这个问题了。[9]

若在图 1 的静参考系中观察，弹簧势能确实是 x 的单变量函数，$-f\mathrm{d}x$ 是势能的全微分。但是在动参考系中，如果把式(3)的第二项丢掉，$\dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}'}{\partial x'}\mathrm{d}x'$ 就不再是 E_{p}' 的全微分，其积分后所得的表达式也失去了作为势能的资格。

2.有关说辞的辨析

本节主要对文[1，4]中与力学相关的说辞进行辨析。

文[1]在解题前有“本题是质点力学问题，根据牛顿第二定律，由于力只能作用在有质量的物体上，轻质弹簧抽去其质量属性后，只是作为传递力的工具（这是理想化的模型），地面参考系和小球通过弹簧的弹力相互作用。小球与弹簧可伸缩的部分组成弹簧振子体系，

所以小球的机械能就是弹簧振子体系的机械能。”。这段说辞中有如下几个问题。

(1)“力只能作用在有质量的物体上”无法从牛顿第二定律得出来。对质点 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ 中的 $\boldsymbol{F}$ 是合外力。如果不是质点，质量 $m = 0$ 只意味着所有外力的矢量和为零，即当弹簧质量忽略后，墙壁对弹簧的作用力矢量与小球对弹簧的作用力矢量合起来等于零(注意是矢量和为零，不是合力为零，见下面的(4))。另外文[4]也坚持：“力不能对没有质量的物体做功”；“朱文就不能计算两个外力……对弹簧所做的总功（若硬要计算则应把弹簧视为质点，但是，因此产生的把弹簧视为质点与忽略弹簧质量的矛盾应由朱文负责）、而只能计算小球或振子这个质点的总功了”等说辞当然也不恰当。力是否只能对有质量的物体做功能？答案是否。因为力矢量 $\boldsymbol{F}$ 元功为 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是受力物体上与力作用点相重合那点位移的微元。$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与受力物体是否有质量无关。至于“被作用对象的质量为 0 时，加速度可能会无穷大”的担心根本没必要，因为被作用对象上还可能有其他力的作用。再者，被作用对象也可把力的功转换成其他形式的能量，比如弹簧把能功储藏为弹性势能。

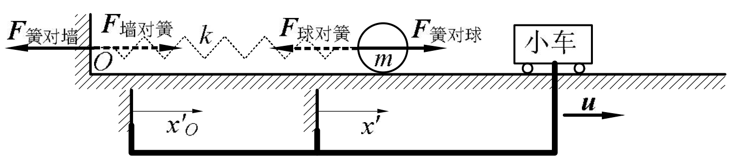

图 4

注意：把弹簧拆掉(这里用点线表示)，就把弹簧对墙壁的作用力 $\boldsymbol{F}_{簧对墙}$ 和对小球的作用力 $\boldsymbol{F}_{簧对球}$ 暴露出来了，各自的反作用力 $\boldsymbol{F}_{墙对簧}$ 和 $\boldsymbol{F}_{球对簧}$ 本不应该在受力图中画出来，但这里想用同一幅图表示它们的对应关系，所以就画上了，但刻意用了虚箭头表示。

(2)“轻质弹簧抽去其质量属性后，只是作为传递力的工具”的“传递力的工具”很不恰当。当弹簧质量不计时，墙壁对弹簧的作用力 $\boldsymbol{F}_{墙对簧}$ 与弹簧对小球的作用力 $\boldsymbol{F}_{簧对球}$ 的大小确实相等，方向也确实相同(见图4)，但是二者的作用点不同(施力物体和受力物体也当然不同)。在本题中，二者的作用点位移更不同(振子的振动必然导致这个不同)，所以它们无法等效，因而不能把墙壁作用在弹簧上的力直接作用到小球上。力有可传性，但这种“传”只能在同一刚体内部传递，然而这里弹簧是变形体(也正是利用了弹簧的变形性质，才发生了振动现象)，所以不能简单地把力传过弹簧。当然，若小球处于平衡状态，那么根据刚化原理可把弹簧当成刚体模型处理，小球的平衡状态不变。此时，操作上可把墙壁对弹簧的力传

递到小球(这个“传递”与弹簧是否有质量也无关)，但刚化原理的前提是小球要处于平衡状态，然而本

题的小球在振动。综上，文[1]的最后一段“由于在这个问题中弹簧仅仅是传递弹力，约束力与保守力是同一个力”必然是不正确的。

(3)“小球的机械能就是弹簧振子体系的机械能”也不恰当。小球只有动能，振子的势能储存在弹簧中。在重力场中，“小球的势能”指的是小球的重力势能，即小球在地球重力场中的势能。在不引起误解的语境下，我们使用“小球的势能”—但这绝不是说小球自己就有势能。故而文[4]中“因此，研究弹簧振子系统的机械能只能研究质点小球或振子的动能和势能而不能再研究弹簧的势能了。事实上，弹簧振子系统的弹性势能也就是质点小球或振子的势能”表述不恰当。文[4]所引用的文[10]陈述“质点在弹力作用下相对于平衡位置的弹性势能”中的“在弹力作用下相对于平衡位置的”的修饰语是很准确的，丢了这个修饰语就不合适了。

除此之外，文[4]还有很多不恰当的地方，明显之处评述如下。

(4)文[4]中“这两个外力的合力为零，即 $f'_{墙}\text{-}f=0$ ……。所以这两个外力在弹簧运动过程中对弹簧在位移 $x'_O=-ut$ 所做的总功为零”说法是不恰当的。这是因为两个外力能不能“合”是有条件的，即合前和合后的力学效果要相同，而不能说数值相反，它们的合力就为零。对于刚体，两个力大小相等，方向相反，作用在同一条直线上，可以合成为一个零力系，而本题弹簧为变形体，作用在两端的力是不能合的，它会把弹簧拉长或压短，而零力系没这个效果—就如同两个同学分油条：在油条两端用相等的力和不用力拉的力学效果是不同的。

(5)文[4]中“弹性势能的变化也仅仅与弹簧的伸缩量或振子的位移 $(x'-0)$ ……有关”有错误。弹簧的伸缩量是弹簧两端的位移差，而不能“或”成振子的位移，即表述中的 $(x'-0)$ 应该是 $(x'-x'_O)$。正是这个错误，在数学演绎上导致了文[1]错误的结果。

(6)文[4]中“弹簧（应为质点）做的是匀速运动，所以弹簧（应为质点）在运动方向上受到的合外力为零”的说法是错误的。“合外力为零”的错误前面已经论述过。对弹簧振子，弹簧所起的作用不是质点，而是变形体。变形体各处的位移和速度都不相同，当然不能说弹簧做匀速运动。

(7)“朱文的 3 种证明之二说的【反证法证明】是错误的”和“所以朱文提出【在小车上看这个系统的势能怎么能保持不变呢】的疑问就不是质疑我们了”是不恰当的。朱如曾先生构造的反例很巧妙。但是文[1]的作者没有认真思考这个反例，而是从自己错误(本文式(1))出发进行自圆其说。

(8)“朱文干吗非要把我们的‘做功负值’强行改成是【小球动能微分 $\mathrm{d}E'_{\mathrm{k}}(t)$ 的相反数】不可呢”是不恰当的。朱如曾先生证明 3 实质是为了理解文[1]错误的原因和所导致不合理结果，并非要“强行改成”。

另外文[5]也有值得商榷的地方。

(9)文[5]“瞬时功”的概念不恰当。功是力对一段过程(必然需要一段时间)的累积量，无“瞬时”概念。功率可以随时间变化,有瞬时功率的说法。另外，计算 1/4 周期功用积分办法很容易，而文[5]所采用平均力的做法的应用面很窄，尤其对大学物理教学应该彻底回避这种办法。

(10)文[5]的“在恒速参考系中，墙壁弹力对弹簧所做的功与小球的质量、速度以及参考系的速度有关。也可说成是墙壁对小球间接做功，称为‘借物传功’。”表述没有逻辑关系，不可以说因为参数 A 与 B 的一个参数有关，就把 A 传到 B 了。物理是精准学科，“借物传功”这种比喻性的模糊词汇尽量少用，但文[5]甚至利用它来推演其他结果。

(11)文[5]的“这表明，由弹簧、小球和墙壁所组成系统的弹性势能等于弹簧的弹性势能与弹簧对墙壁所做的功之和”说法是错误的。本题弹簧的弹性势能就是系统弹性势能。文[5]的作者大概想解释这段文字前面的等式，但是该等式还有 $-f'\mathrm{d}x'$ 这一项，它表示小球对弹簧的元功。

(12)文[5]的“也可视为墙壁对弹簧所做的功，那么弹簧弹力对墙壁所做的功为”的逻辑混乱。本来就是墙壁直接对弹簧做功，不知为什么非要“借物传功”，绕道小球？

3.不同参考系的机械能守恒

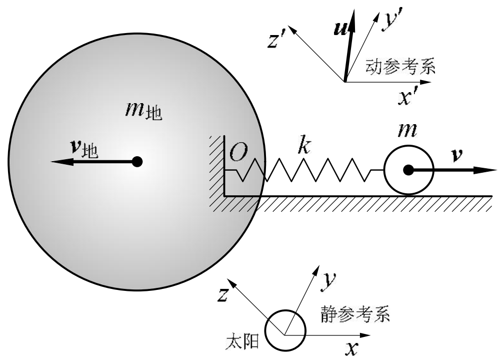

图 5

静止惯性参考系中机械能守恒的系统，在匀速运动的参考系中观察的机械能怎么能不守恒呢？在物理模型上我们也找不到耗散能量的因素呀？这个纠结必须解开。

3.1 站到地球之外的惯性系看

企图解开这一纠结的立即想法是把地球的作用也考虑进来。如果把地球考虑进来，静止惯性参考系就只能选择地球之外的更高级别的惯性系，比如太阳参考系，总之静止惯性参考系是理想的，速度和加速度都是0。就讨论振子机械能的目的而言，其它天体的作用和地球的自转都要忽略掉(或者相互抵消)，地球也被当成一个均匀球形刚体，或者更进一步简化为质点，地球和小球之间只有弹簧力的作用，如图 5 所示。记小球和地球的质量分别为m和$m_{地}$，各自相对静止惯性参考系的速度分别为$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{v}_{地}$，弹簧的势能为$E_{\rm p}$，则有

$$\frac{1}{2}m_{地}v_{地}^2+\frac{1}{2}mv^2+E_{\rm p}=E_0 \quad (4)$$

式中E_0为系统能量常量。假定还有一个以恒定速度$\boldsymbol{u}$运动的参考系$x'y'z'$，在这个动参考系中观察到的小球和地球速度分别为$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}'_{地}=\boldsymbol{v}_{地}-\boldsymbol{u}$，相应的机械能$E'$为(弹簧势能仍然不变)

$$E'=\frac{1}{2}m_{地}v'^2_{地}+\frac{1}{2}mv'^2+E_{\rm p} \quad (5)$$

将$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}'_{地}=\boldsymbol{v}_{地}-\boldsymbol{u}$代入有

$$\begin{aligned}E'&=\frac{1}{2}m_{地}(\boldsymbol{v}_{地}-\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{v}_{地}-\boldsymbol{u})+\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+E_{\rm p}\\&=\frac{1}{2}m_{地}(v_{地}^2-2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_{地}+u^2)+\frac{1}{2}m(v^2-2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+u^2)+E_{\rm p}\end{aligned}$$

进一步整理可得

$$E'=\left(\frac{1}{2}m_{地}v_{地}^2+\frac{1}{2}mv^2+E_{\rm p}\right)+\left(\frac{1}{2}m_{地}u^2+\frac{1}{2}mu^2\right)-\boldsymbol{u}\cdot\left(m_{地}\boldsymbol{v}_{地}+m\boldsymbol{v}\right) \quad (6)$$

式(6)等号左端第一个圆括号内为静止系中看到的系统机械能E_0，第二个圆括号内也是常量。第三个圆括号内为静止系中观察到的系统动量$\boldsymbol{p}=m_{地}\boldsymbol{v}_{地}+m\boldsymbol{v}$。前面已经声明，其他外力忽略不计，所以动量$\boldsymbol{p}$也不随时间变化。

综上，在相对于理想静止惯性参考系作匀速动参考系中，观察到的机械能也守恒。因为式(4)到式(6)没有利用$E_{\rm p}$的具体形式，所以对任何类型的势能，如重力、理想弹簧力等等，都是成立的。

3.2 站到地球表面看

图 5 与图 1 相比，我们感觉相对于地面的动参考系要亲切一些，因为毕竟大多数人的生活和生活所依赖的工具，如房子、汽车、办公桌等等，都是相对于地面的(或者地球表面的)。此时的 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_{地},\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{地}$，把它们代入式(5)有

$$E'=\frac{1}{2}mv'^2+E_{\mathrm{p}} \quad (7)$$

在前面的论述中，我们有两个守恒量 E_0 和 $\boldsymbol{p}$，以及一个有感觉的 $\boldsymbol{v}'$。为了便于对式(7)讨论，我们应该把它换成为 E_0，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 的表达式。由 $\boldsymbol{p}=m_{地}\boldsymbol{v}_{地}+m\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{地}$ 可解出

$$\boldsymbol{v}_{地}=\frac{\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{v}'}{m_{地}+m},\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}+m_{地}\boldsymbol{v}'}{m_{地}+m} \quad (8)$$

代入式(4)可得

$$E_{\mathrm{p}}=E_0\text{-}\frac{1}{2}m_{地}\left|\frac{\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{v}'}{m_{地}+m}\right|^2\text{-}\frac{1}{2}m\left|\frac{\boldsymbol{p}+m_{地}\boldsymbol{v}'}{m_{地}+m}\right|^2 \quad (9)$$

再代入式(7)有

$$E'=E_0\text{-}\frac{1}{2}\frac{p^2}{m_{地}+m}+\frac{m}{m_{地}+m}\left(\frac{1}{2}mv'^2\right) \quad (10)$$

式(10)等号右边前两项为常量，第三项则会随时间变化，所以在地面上观察到的机械能不守恒。其本质是固定于地球表面参考系不是惯性参考系(因为弹簧的反作用)，但所幸的是地球质量远远大于被观察物体的质量，从而不守恒量很小。如 1000kg 的物体以相对于地面 1000m/s 的速度运动(接近 3 倍音速)，第三项也只有 8.365×10^{-17}J(地球质量按 5.977×10^{24}kg 计算)。

3.3 从相对地球表面匀速运动的参考系看

如果像图 1 那样，参考系相对于地球表面有速度，情形又不一样了。假定此动参考系相对地面的速度为 $\boldsymbol{u}'$，则被观察对象的相对速度为 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}_{地}+\boldsymbol{u}')$，再与动量守恒式 $\boldsymbol{p}=m_{地}\boldsymbol{v}_{地}+m\boldsymbol{v}$ 联合可解得

$$\boldsymbol{v}_{地}=\frac{\boldsymbol{p}-m(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}')}{m_{地}+m},\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}+m_{地}(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}')}{m_{地}+m} \quad (11)$$

代入式(4)解出 E_{p}，把 E_{p} 再代入式(7)，整理可得(注意是弹簧-小球的机械能，不要计入地球的相对动能)

$$E'=E_0\text{-}\frac{1}{2}\frac{p^2}{m_{地}+m}+\frac{m}{m_{地}+m}\left(\frac{1}{2}mv'^2\right)-\frac{1}{2}\frac{mm_{地}}{m_{地}+m}u'^2-\frac{mm_{地}}{m_{地}+m}(\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{u}') \quad (12)$$

式(12)右边前三项与式(10)相同，几乎不随时间变化，第四项也是常量，但第五项因 $\boldsymbol{v}'$ 随时间变化而不能无条件地为常量，所以系统的机械能可能不守恒，就如同图 1 的模型。当然如果 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{0}$，也就是参考系相对于地面静止，那么式(12)回到了式(10)几乎守恒情形。这有点哭笑不得，原来我们在地球上习以为常的机械能守恒只是一种数值巧合！

因为地球的相对速度为常量，进而动能为常量，所以即使把地球动能也考虑进来，也不守恒。文[5]的“由于墙壁的动能保持不变，所以由弹簧、小球和墙壁组成系统的机械能始终守恒”表述也不妥。

还有一种情况是 $\boldsymbol{u}'$ 始终与 $\boldsymbol{v}'$ 垂直，如质点沿垂直方向运动，而动参考系沿水平方向运动，则式(12)的 E' 不随时间变化。

若只关心两个时刻之间的机械能关系(不关心过程)，记速度分别为 $\boldsymbol{v}_1'$ 和 $\boldsymbol{v}_2'$，那么保证了

$$\boldsymbol{u}'\cdot(\boldsymbol{v}_1'\text{-}\boldsymbol{v}_2')=0 \quad (13)$$

则能保证两个时刻的机械能相等，但这种情形往往就不再被称为机械能守恒了。

3.4 惯性力做功的解释

式(6)的 E' 能成为常量的前提是第三个圆括号内的 $\boldsymbol{p}=m_{地}\boldsymbol{v}_{地}+m\boldsymbol{v}$ 为常量，但因为 $m\boldsymbol{v}$ 不是常量，所以 $m_{地}\boldsymbol{v}_{地}$ 肯定也不是常量，也就是说地球是有加速度的，而相对地球作匀速运动的参考系也就不再是惯性系，所以在这个参考系中看到的机械能式(12)不守恒就可以心安理得地接受了[11~13]。

认识到地面是非惯性系，让我们能够坦然接受式(12)的不守恒，但惯性力能否解释式(12)的全部不守恒因素呢？答案是肯定的。论证如下。

地球和小球都要加惯性力，二者分别为

$$\boldsymbol{F}_{地\mathrm{I}}=-m_{地}\boldsymbol{a}_{地}=-m_{地}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{地}}{\mathrm{d}t} \quad (14)$$

$$\boldsymbol{F}_{球\mathrm{I}}=-m\boldsymbol{a}_{地}=-m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{地}}{\mathrm{d}t} \quad (15)$$

地球惯性力对地球所做的功为(此处的地球本质为质点，惯性力的作用点就在地球“质点”上)

$$\Delta W_{地}=\int_0^t \boldsymbol{F}_{地\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{v}'_{地}\mathrm{d}t=\int_0^t \boldsymbol{F}_{地\mathrm{I}}\cdot(-\boldsymbol{u}')\mathrm{d}t$$

将式(14)代入有

$$\Delta W_{地}=\int_0^t\left(-m_{地}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{地}}{\mathrm{d}t}\right)\cdot(-\boldsymbol{u}')\mathrm{d}t=m_{地}\boldsymbol{u}'\cdot\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_{地}$$

积出为

$$\Delta W_{地}=m_{地}\boldsymbol{u}'\cdot(\boldsymbol{v}_{地}-\boldsymbol{v}_{地0})$$

其中 $\boldsymbol{v}_{地0}$ 是地球在 $t=0$ 时刻的速度。将式(11)和 $\boldsymbol{p}=m_{地}\boldsymbol{v}_{地}+m\boldsymbol{v}=m_{地}\boldsymbol{v}_{地0}+m\boldsymbol{v}_0$ ($\boldsymbol{v}_0$ 为被研究对象在 $t=0$ 时的速度)代入有

$$\Delta W_{地}=-\frac{mm_{地}}{m_{地}+m}\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}'+\frac{mm_{地}}{m_{地}+m}\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}'_0 \quad (16)$$

式中 $\boldsymbol{v}'_0$ 是被研究对象在 $t=0$ 时相对动参考系的速度。

小球惯性力对小球所做的功为

$$\Delta W_{球}=\int_0^t \boldsymbol{F}_{球\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t=\int_0^t\left(-m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{地}}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t=-m\int_0^t\boldsymbol{v}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{地}$$

把式(11)的 $\boldsymbol{v}_{地}$ 代入有

$$\Delta W_{球}=-m\int_0^t\boldsymbol{v}'\cdot\mathrm{d}\left[\frac{\boldsymbol{p}-m(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}')}{m_{地}+m}\right]=\frac{m^2}{m_{地}+m}\int_0^t\boldsymbol{v}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}'$$

积出为

$$\Delta W_{球}=\frac{1}{2}\frac{m^2}{m_{地}+m}(v'^2-v_0'^2) \quad (17)$$

的确可以验算出 E'-$\Delta W_{地}$-$\Delta W_{球}$ 为常量，即

$$E'\text{-}\Delta W_{地}\text{-}\Delta W_{球}=E_0\text{-}\frac{p^2\text{-}m^2v_0'^2+mm_{地}u'^2+2mm_{地}\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}'_0}{2(m_{地}+m)} \quad (18)$$

不随时间变化。尽管式(18)得到了一个常量，但不宜再套用守恒的术语，而是用动能定理(或功能原理)，是考虑了惯性力的动能定理(功能原理)的运用。

比较式(12)、式(16)和式(17)可知，惯性力对地球的功解释了式(12)的最后一项的不守恒，而惯性力对小球的功解释了式(12)的第三项不守恒，当然这一项很小。

总之相对地球匀速运动的动坐标系中观察到的机械能不守恒现象，可被惯性力的功全部解释。

还有一种情形比较有趣，即假定 $m_{地}$ 为无穷大。此时式(12)的第二项变成 0，即式(10)的不守恒项不复存在。但式(12)的第四项变成 $-m(\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{u}')$ 仍然存在。由于 $m_{地}$ 假定为无穷大，所以弹簧对墙壁的有限作用力引起的地球加速度为 0，进而动参考系 $O'x'y'z'$ 就应该是惯性系。此时，地面是惯性系，$O'x'y'z'$ 也是惯性系，但所观察的机械能在前者守恒(式(10))，但是在后者不守恒(式(12))。这时因数学上遇到了极限运算，物理意义是在地球的“无限大”动能上再加上“有限”的功，仍是无限大动能。

4．结束语

笔者指出在动参考系下，弹簧的势能是弹簧两端位移的二元函数，其全微分应包括全部端点的贡献，而有关文章的失误是丢掉了远离小球一端位移微元的贡献。

在惯性坐标系、地面坐标系和相对地面匀速运动坐标系的三个层面讨论了机械能守恒性，并利用惯性力的功解释了相对地面匀速运动坐标系的机械能不守恒现象。

对相关文献中若干说辞进行了辨析，但笔者感到一丝茫然。基本概念和基本理论是一门课程最核心的内容，比如力的三要素：大小、方向和作用点，一个都不能少，只有在特殊条件下，才能进行简化，而使用简化结论一定要注意简化的条件。从辨析中可以看出，部分教师，仍然对力的三要素这些教学核心内容理解不到位。

参考文献

1 李学生，师教民。对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷[J]。物理通报。2014，(9)：119~120。
2 孟昭辉。运用机械能守恒定律解题的参照系问题——对“对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷”一文的不同意见[J]。物理教师。2015，36(2)：94。
3 朱如曾。弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒--关于“对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷”的商榷[J]。物理通报。2015，(4)：100~103。
4 师教民。答《弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒——关于〈对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷〉的商榷》[J]。物理通报。2015，(7)：115~118。
5 郑金。对一道物理竞赛题的两种互异解答的探讨[J]。物理通报。2015，(07)：109-112。
6 熊秉衡。在不同惯性系中的机械能守恆定律[J]。物理通报。1964，(6)：261-264。
7 高炳坤。“机械能守恒定律是否遵从相对性原理”辨[J]。大学物理。2000，19(2)：21~22。
8 刘明成，刘文芳，赵文桐。引力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J]。物理通报，2015，(6)：123-124。
9 高炳坤。一个保守力作的功等于势能的减少吗？[J]。大学物理。2001，20(5)：19~21。
10 梁绍荣，刘昌年，盛正华。普通物理学（第 1 分册）力学[M]。北京：高等教育出版社，1987。164。
11 高炳坤等。地球所受的一种易被忽视的惯性力[J]。大学物理，1991，10(11)：46-47。
12 高炳坤。力学中一个令人费解的问题[J]。大学物理，1995，14(5)：20-21。
13 高炳坤。用惯性力分析二体问题[J]。大学物理。2011，30(6)：8，27。

5/4/2017