

12. 轻质弹簧的性质定理及其应用举例

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师，中国管理科学院学术委员会特约研究员，北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要：文章首先分析给出了轻质弹簧的一个性质定理，并利用该性质定理分析几个常见的物理习题。

[李学生 (Li Xuesheng). 12. **轻质弹簧的性质定理及其应用举例**. *Academ Arena* 2017;9(15s): 47-50]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 12. doi:[10.7537/marsaaj0915s1712](https://doi.org/10.7537/marsaaj0915s1712).

关键词：轻质弹簧；性质定理；等效观点；机械能守恒

中图分类号：O 313.1

文献标识码：A

轻质弹簧的性质定理：轻质弹簧虽然始终是两端受力而不是单端受力，但是计算轻质弹簧的形变和弹性势能时，设有两种情形：第一，将轻质弹簧的一个端点视为相对静止，此时劲度系数为 k ；第二，将其中点视为相对静止，则可视为两根串联的弹簧，其劲度系数是 $2k$ 。

证明：1、当观察者在弹力所在直线上的分速度为 0 时

假设轻质弹簧所受外力为 F ，我们可以从两个角度认识，一方面将轻质弹簧的一个端点视为相对静止，

此时劲度系数为 k ，形变为 x ，我们当初定义劲度系数 $k=F/x$ ，弹性势能为 $\frac{1}{2} kx^2$ ；换一个角度如果认为弹簧是两端受力使弹簧发生形变，此时应该视为为两个劲度系数相同的弹簧串联，根据弹簧串联的知识可以知道

这时每个轻质弹簧的劲度系数为 $2k$ ，弹性形变为 $\frac{1}{2} x$ ，整个弹簧形变还是 x ，弹性势能为 $\frac{1}{2} k(\frac{1}{2} x)^2$

$\frac{1}{2} kx^2$ 也不变。所以在轻质弹簧问题中考虑两端受力与一端受力计算弹性形变和弹性势能是等效的，只不过等效劲度系数不同，但是由于整个弹簧的劲度系数不变，计算弹簧振子周期时仍然用 k ，这是轻质弹簧的一个性质。

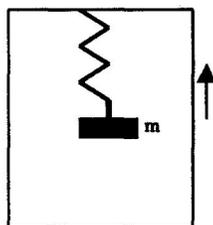
2、当匀速运动（变速运动也成立，本文不再讨论）的观察者相对于轻质弹簧的固定点在弹力所在直线上的分速度不等于 0 时，根据对称性原理， $dE_{lp}(t) = \int_{x_1}^{x_2} f_1 dx_1 = \int_{x_1}^{x_2} f_1 dx_1$ ，与只考虑一端受到的力产生的效果相同。证毕。

对于两端都有位移的弹簧的总伸长定义为一端的形变，这里采用等效的观点处理问题，爱因斯坦创立广义相对论时也曾经采用过等效原理。如果两端受力劲度系数都按照 k 计算，形变有可能超出弹性形变。本文把地球质量视为充分大，故稳定地保持为惯性系。

说明：轻质弹簧的性质定理只是说明考虑两端受力效果计算用 $2k$ ，考虑一端受力效果劲度系数用 k 计算，这里采用等效的观点处理问题。该定理不代表弹簧的劲度系数发生了变化，其实弹簧的劲度系数是伽利略不变量。

根据质量、时间和空间坐标的伽利略变换式，弹簧的无形变长度 l_0 和伸长 $(x-x_0)$ 以及质点的加速度均是伽利略不变量。力学相对性原理保证牛顿第二定律适用于任何惯性系，故力也是伽利略不变量，因此弹簧拉力 f 是伽利略不变量，由于伸长 $(x-x_0)$ 也是伽利略不变量，所以作为拉力与伸长之比的弹性系数也是伽利略不变量，但是胡克定律不具有伽利略变换的不变性。（说明：本文中的弹簧质量不等于 0，质量为充分小，按照质量为 0 计算）

例 1 龚劲涛、吴英发表在《绵阳师范学院学报》（第 25 卷第 5 期）的文章《对机械能守恒定律条件的认识》有这样一个题目

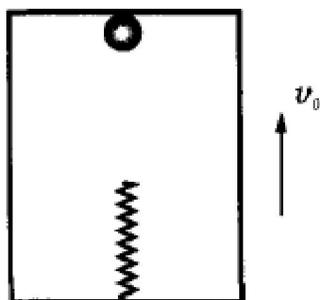


(图1)

文章说：“如上图，在匀速上升的电梯的天花板上用弹簧下挂物体 m ，研究 m 、弹簧和地球组成的系统，以地面为参考系时，天花板的拉力 T 对弹簧做功： $dA_{\text{外}} = T \cdot dr \neq 0$ ，系统的机械能不守恒。但我们选择电梯为参照系时，整个过程拉力 T 不做功： $dA_{\text{外}}=0$ ，只有保守内力做功，系统的机械能守恒。”

笔者认为：文章的分析是错误的，因为如果这样机械能守恒定律就不符合力学相对性原理了。把地球质量视为无穷大，第一次以地球为参考系，只有保守力做功机械能是守恒的，根据轻质弹簧的性质考虑一端拉力与两端的拉力弹性势能是相同的，因此机械能是守恒的；选择电梯为参照系时，整个过程拉力 T 不做功： $dA_{\text{外}}=0$ ，只有保守内力做功，系统的机械能守恒，作者的分析是正确的。

例2：匀速上升的电梯中有一竖直弹簧，一质量为 m 的小球由电梯天花板处自由落下，小球与竖直弹簧接触后又被弹起，试分析说明机械能守恒的过程。[1]



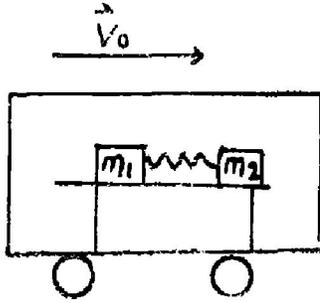
(图2)

作者认为：以电梯为参考系，电梯地板给系统的支持力对系统不做功，小球和弹簧及地球构成的系统机械能守恒。若以地面为参考系，电梯地板给系统的支持力对系统做了正功，该系统的机械能是增加的。可见，若在某一参考系中观察，外力对系统不做功，不能保证在其他参考系中得到同样的观察结果。同样的，若在某一参考系中观察，系统的非保守内力不做功，也不能保证在其他惯性参考系中观察到相同的结果，并就此得出“机械能守恒是有相对性的。某系统在某一惯性参考系中机械能守恒，若在其他的惯性参考系中观察，该系统的机械能不一定守恒”的观点。

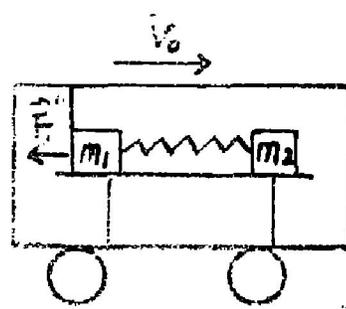
笔者认为，文章作者的分析是错误的，以地面为参考系，既然电梯是匀速运动，系统只有保守力做功，机械能显然守恒；以电梯为参考系，电梯地板给系统的支持力对系统不做功，小球和弹簧及地球构成的系统机械能守恒。因为轻质弹簧的性质无需考虑地板对于弹簧的支持力。

张淑芳教授在《机械能守恒定律违背力学相对性原理吗》^[2]列举的两个实例：

例3、如图3，在匀速直线运动的汽车上，固定一光滑水平桌面，桌面上放置着由木块 m_1 、 m_2 和轻质弹簧构成的振动系统。该系统在桌面和地面两个参照系中，均满足机械能守恒条件，故在两个参照系中，机械能者守恒。(弹簧开始处于压缩状态)



(图 3)



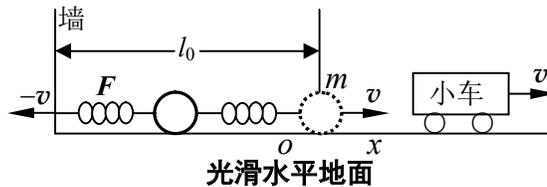
(图 4)

例4、在上例中，把 m_1 固定在桌面上，情形就不同了，以桌面为参照系时，满足 $dw_{外}=0$ ， $dw_{内}\neq 0$ ，系统的机械能守恒。以地球为参照系时，外力 F 做功，系统的机械能不再守恒。

笔者认为错误的，机械能依然守恒，根据轻质弹簧的性质很容易说明。

例 5、文献[3] [5]中有这样一个题目-----如下图所示，一轻质弹簧，一端顶在墙上，另一端顶一质量为 m 的小球；今用手向左推小球使弹簧压缩，然后突然放手，当弹簧恢复原长 l_0 时，小球便以速度 v （相对于地面弹出，并保持此速度一直运动下去。人所共知，从地面上看，从突然放手到小球被弹出这个过程中，“弹

簧和小球”这个系统的机械能是守恒的，弹簧的初势能 E_p 必等于小球的末动能 $\frac{1}{2}mv^2$ ，即 $E_p = \frac{1}{2}mv^2$ (1)



上图为图，去掉 F ， $-v$ 及 $-v$ 下的箭头后为图 1

(图 5)

设想一小车，它恰好一直以小球被弹出后的速度 v 相对于地面运动。从小车上看，弹簧的初势能仍为

E_p ，但小球的初动能却为 $\frac{1}{2}mv^2$ 了（因刚放手时小球相对于小车的速度为 v ）；弹簧的末势能仍为零，但

小球的末动能却为零了；故“弹簧和小球”这个系统的初机械能为 $E_1 = E_p + \frac{1}{2}mv^2$ ，末机械能为 $E_2 = 0$ ，

所以 $E_2 < E_1$ ($E_p + \frac{1}{2}mv^2$) (2)

从小车上看，“弹簧和小球”这个系统的能量到哪里去了？若说传给地球了，可地球相对于小球的动能 $\frac{1}{2}M_e v^2$ 却始终未变；若说转化为地球的内能了，可从地面上看，“弹簧和小球”这个系统的机械能又是守恒的。

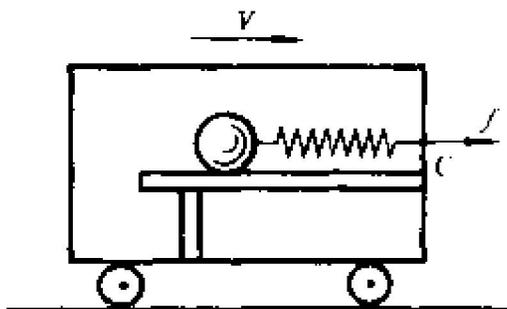
解答：从墙对弹簧的作用力 F 讨论“弹簧和小球”系统从地面上看，墙对弹簧的作用力 F （见图 5）的作用点无位移，故 F 不作功，当然“弹簧和小球”系统的机械能应守恒，即应有式(1)。

从小车上看，墙对弹簧的作用力 F 的作用点却以恒速 v 移动（图 2），故 F 要作负功，当然“弹簧和小球”系统的机械能要减少。这就定性地解释了式(2)，下面进行定量的分析。 F 作的功为 $A = \int F (-v dt)$

$$\int_{\nu} F dt.$$

笔者认为高炳坤教授的分析是错误的，前面以地面为参照系，实际上把地球质量作为充分大，最后按照两体问题解决，前后不一致，能量转化为内能就更没有道理，在经典力学中只有摩擦力和碰撞才可以将机械能转为内能；由于是轻质弹簧，根据轻质弹簧的性质考虑一端受力即可，因此只有保守力做功，机械能守恒定律依然成立。对于不同的观察者，弹性势能可能不同，当观察者在弹力方向上的分速度不等于 0 时，不能直接套用原来的公式，应该根据保守力和势能的关系进行推导。

例 6：文献[4]中的实验是在相对于地面匀速运动的小车上，以小车为参照系机械能守恒定律成立，以地面为参照系机械能守恒定律不成立。在车厢里光滑桌面上弹簧拉着一个物体 m 做简谐振动，车厢以匀速 V 前进。选弹簧和 m 作为我们的系统，箱壁在 C 点拉弹簧的力 f 是外力。以地面为参照系， $dA_{\text{外}} = f \cdot V dt \neq 0$ ，从而系统的机械能 $E = E_K - E_P \neq \text{常量}$ 。换到车厢参考系，弹簧与箱壁的连接点 C 没有位移，外力 f 不做功， $dA_{\text{外}}' = 0$ ，系统的机械能 $E' = E_K' + E_P' = \text{常量}$ 。



(图 6)

笔者认为赵凯华教授的分析是错误的，根据轻质弹簧的性质定理，我们只需要考察弹簧的一端受力即可，右侧的力不研究不影响效果，此时容易得知该系统的机械能守恒。

理论不是一成不变的教条，相反它们仅是前人通过他们的有限实践总结出的近似规律。科学史表明，这些规律确实具有相当的普适性。但随着人类认识的深化，必然会暴露出它们的局限性。如何准确地发现理论的局限性，再将理论推广到一个新的领域这无疑科学发展的关键环节。科学的生命力在于不断创新地发展，可以说科学停止了创新之时，就是科学消亡之日。科学史也表明这些发展往往总是更远离人类的直觉，而使人们一时难以接受的。

参考文献：

- [1] 李灏。对高中物理教材“机械能守恒定律”一节的思考。物理教师，2004（2）：6~7。
- [2] 张淑芳机械能守恒定律违背力学相对性原理吗，邢台师专学(综合版)，1995。4：82。
- [3] 高炳坤能量追踪。大学物理，2001。3：15。
- [4] 赵凯华，罗蔚茵。新概念物理教程。力学[M]。北京：高等教育出版社，2000，124。
- [5] 高炳坤从 4 个参照系看弹射过程。大学物理，2010（7）。
- [6] 刘敏，孙皆宜。再论机械能守恒。牡丹江教育学院学报，2005（5）：26，34。

5/4/2017