

## 9. 答《弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒——关于〈对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷〉的商榷》

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授, 理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员, 中国民主同盟盟员 (作者为中国科学院高能物理所研究员)  
[xiandaiwulixue@21cn.com](mailto:xiandaiwulixue@21cn.com), [1922538071@qq.com](mailto:1922538071@qq.com)

**摘要:** 说明了《弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒——关于〈对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷〉的商榷》错误。

[李学生 (Li Xuesheng). 9. 答《弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒——关于〈对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷〉的商榷》. *Academ Arena* 2017;9(15s): 31-34]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 9. doi:[10.7537/marsaaj0915s1709](https://doi.org/10.7537/marsaaj0915s1709).

**关键词:** 物理竞赛试题; 弹簧振子; 动能; 势能; 机械能守恒

**中图分类号:** O 313.1 **文献标识码:** A

《物理通报》2015 年第 4 期发表了中国科学院力学研究所朱如曾研究员的论文《弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒——关于〈对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷〉的商榷》(简称为朱文)。我们作为原文的作者, 回应朱文如下:

I 朱文在其第 3 段中说:【弹簧受到的外力有两个, 即墙壁作用于弹簧一端( $x'_o$   $l_0$ )的力  $f'_{\text{墙}}$  和小球作用于弹簧另一端( $x'$ )的力( $f'$ )。两个外力在弹簧运动过程中对弹簧所做的总功为

$$dW' = f'_{\text{墙}} d(x'_o - l_0) + f' dx' = f' d(x' - x'_o). \quad (4)$$

由于忽略弹簧的质量和动能, 弹簧的机械能  $E'_{\text{弹簧}}$  就是弹簧的弹性势能, 故根据功能原理, 弹簧的弹性势能的增量为

$$dE'_{\text{p 弹簧}} = dE'_{\text{弹簧}} = dW' = f' d(x' - x'_o). \quad (5)$$

对于朱文的上述这段话, 我们谈两条意见如下: 当力移动物体或质点做功时, 物体或质点必须有质量, 弹簧振子本来定义就是不考虑弹簧的质量, 轻质弹簧的概念一直就有, 这并不是我们的独创。忽略弹簧质量的同时等于忽略了弹簧的弹性势能(根据质能方程, 没有质量就没有能量), 朱文既然说【忽略弹簧的质量】, 那么就不能说对弹簧做功了, 所以朱文又说【两个外力…对弹簧所做的总功为…】就错了。由于弹簧不考虑质量, 因此弹性势能本质上是小球的弹性势能, 不是弹簧的弹性势能。因此, 朱文的(4), (5)式中因有  $f' dx'$  这一项就错了。所以, 朱文由(4), (5)式推导出来的结论

$$E' = \frac{1}{2} kA^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 + m\omega A \sin(\omega t) \quad (8)$$

错误, 即朱文推导出的弹簧振子系统的机械能不守恒的结论错误。朱文认为小车系与地面系的势能零点始终相同才得出了机械能不守恒的错误, 本质上是求地面系的势能和小车系的动能之和, 根据相对性原理或者说坐标系的观点, 小车系的势能零点应该相对于小车系的原点不变。例如一辆小车在水平地面上匀速运动, 速度为  $v$ , 一个小球在小车光滑的底面上相对于小车静止, 在小车系里面的观察者认为小球受到的合力为  $0$ , 速度为  $0$ , 动能不变等于  $0$ , 在地面的观察者认为小球受到的合力为  $0$ , 速度不变且始终为  $v$ , 动能不变

$\frac{1}{2} \mu v^2$ ; 假设在地面有一间办公室, 办公室里一位工作人员, 他看不见小车的运动, 但是他知道小球开始相对于小车静止, 小球受到的合力为  $0$ , 因此他认为小球的动能不变始终等于  $0$ , 得出的结论与小车系里的观察者结论相同, 原因在于办公室里的人员虽然在地面上但事实上依然以小车为参照系——“身在曹营心在汉”, 朱文的错误即在于此。

II 朱文在其第4段中对我们的论文评论说:【…其错误根源在于文献[1]在论证中所用势能微分公式(3\*)

是错误的。下面遵照楼老师对问题多角度理解的要求给出3种证明。

(1)与正确的势能微分公式(5)相比较

与式(5)相比较显见,式(3\*)右边丢失了 $f'_{\text{墙}} dx'_o$ 项。这是不允许的,因为文献[1]是按照他选定的特解式(1\*),随着时间变化计算随体微分 $dx'$ 的,因此 $dt$ 一定不是零,式(1)最后一式表明 $dx'_o$ 也就必不是零,所以 $f'_{\text{墙}} dx'_o$ 决不可丢失。此丢失项就是在 $S'$ 系中看到移动着的墙壁对弹簧所做的功。由于 $f'_{\text{墙}}$ 是整个系统的唯一外力,由功能原理可知, $f'_{\text{墙}} dx'_o$ 就是 $dE'$ 。所以这一丢失恰好导致该特解所具有的机械能不变的错误结论。

(2)反证法证明

设想在图1中,小车上有一个钩子,钩住小球使之相对小车静止不动,另一端仍然固定在墙壁上。按照文献[1]不计墙壁力的功的思想,式(3\*)在此当然成立。但是因为小车钩住小球,所以 $dx' = 0$ ,于是从式(3\*)得到 $\frac{dE'_p(t)}{dt} = 0$ , (9)

此式表明小球势能不随时间而变!如果小球初始时刻处于平衡位置 $x'(0) = x_0 = 0$ ,势能将一直保持为零,动能又明显保持为零,于是机械能、势能、动能都保持为零。可是实际情况是弹簧在不断地被拉伸,在小车上看这个系统的势能怎么能保持不变呢?所以这一荒谬推论从反面证明了其出发点式(3\*)确实不成立。

(3)从式(3\*)的实质证明其错误

根据动能定理,文献[1]式(3\*)右边实际上表示的是小球动能微分 $dE'_k(t')$ 的相反数,因此式(3\*)应订正为 $\frac{dE'_k(t')}{dt'} = -f dx'$  (10)

其中的 $\frac{dE'_k(t')}{dt'}$ 和 $dx'$ 都是随体微分。式(3\*)相当于将系统动能的随体减少误解为势能的随体增加,这样导出的所谓“势能”,实际上与负动能只差一个常数,由此导出的所谓“机械能”当然保持不变了,可是它与系统的真实机械能无关!】

对于朱文的上述这段评论,我们谈4条意见如下:

①朱文说我们【按照他选定的特解式(1\*)】是错误的。因为式(1\*)不是我们选定的,是据伽利略变换和微分运算得出的,而且式(1\*)也不是什么特解式。例如:据伽利略变换和微分运算得:

$$x' = x - ut = A \cos(\omega t) - ut, \quad v' = \frac{dx'}{dt} = -\omega A \sin(\omega t) - u. \quad (1*)$$

因此,朱文所说的上句话是错误的。

②朱文的3种证明之一说【正确的势能微分公式(5)】是错误的。朱文说【式(3\*)右边丢失了 $f'_{\text{墙}} dx'_o$ 项】是错误的。因为我们文章中已经指明了,在弹簧振子中弹簧仅仅是产生力、传递力的工具,墙对于弹簧的作用力和弹簧对于小球的作用力是同一个力,我们已经计算了弹簧对于小球的作用力,因此不必再计算墙对于弹簧的作用力了,如果再计算就重复了。<sup>[5]</sup>说得更本质一些,在弹簧振子中弹簧与墙形成了一个场,与重力场比较的话(只是类比),重力场一般视为匀强场,弹力场的大小和方向可以变化,在自由落体运动我们只计算地球与质点之间的相互作用,不能把地球对重力场的力、重力场对质点的力看做两个力。

③朱文的3种证明之二说的【反证法证明】是错误的。错在朱文说的【在小车上看这个系统的势能怎么能保持不变呢?所以这一荒谬推论从反面证明了其出发点式(3\*)确实不成立】这句话。

首先,我们的出发点式(3\*) $\frac{dE'_p(t)}{dt} = f dx'$ 确实成立,理由为:据伽利略变换和微分运算得:

$$x' = x - ut = A \cos(\omega t) - ut, \quad v' = \frac{dx'}{dt} = -\omega A \sin(\omega t) - u, \\ a' = \frac{dv'}{dt} = \omega^2 A \cos(\omega t) = a, \quad f' = m a' = m a = f.$$

根据“势能的减少量等于保守内力做的功”得:

$$\frac{dE'_p(t)}{dt} = -f' dx', \quad \frac{dE'_p(t)}{dt} = -f dx' = f dx'. \quad (3*)$$

所以我们的出发点式(3\*)  $dE'_p(t) = f dx'$  因为满足“势能的减少量等于保守内力做的功”而正确。

实验中的弹簧具有势能是因为具有质量，与弹簧振子中的弹簧有着本质的区别。  $E(t) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ ，如果这样表达弹性势能，就可以看出弹性势能属于小球，而不是属于弹簧。由于弹簧和小球连接在一起，物理量之间存在着联系，因此可以等效认为属于弹簧。势能是用保守力的功定义的，是对于质点而言的，对于没有质量的弹簧显然没有势能而言，例如文献[4]在第164页上说：“这个质点在弹力作用下相对于平衡位置具有转换成其他运动形态的一定‘能力’，称为质点在弹力作用下相对于平衡位置的弹性势能，以  $E_p$  表示，

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (10)$$

④朱文的3种证明之三说的【文献[1]式(3\*)右边实际上表示的是小球动能微分  $dE'_k(t')$  的相反数，因此式(3\*)应订正为  $dE'_k(t') = f dx'$  (10)

其中的  $dE'_k(t')$  和  $dx'$  都是随体微分】这句话是错误的。朱文认为这不是真正的机械能，请问何为真正的机械能呢？

因为我们的式(3\*)  $dE'_p(t) = f' dx' = f dx'$  是“势能的减少量等于保守内力做的功”， $dE'_p(t) = f' dx'$  推导出：

$$E'_p(t) = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t) - m\omega A \sin(\omega t) = \frac{1}{2} kx^2 - mv.$$

说明朱文忘记了弹性势能公式证明的依据，只记得经典弹性势能公式（文献[3]也存在同样的错误，该文认为一对保守力做功等于势能的减少，可是本题中弹簧固定在墙面上对于地球做功视为0，等价于一个保守力做的功等于势能的减少，在地面系计算能量守恒时我们忽略了地球能量的变化，因此在小车系也应该忽略地球能量的变化，才能保持自洽，否则地面系也不守恒。），既然认为“势能的减少量等于保守内力做的功”不适用于小车系，那么经典势能公式也不适用于小车系，因为经典弹性势能公式是根据“势能的减少量等于保守内力做的功”得出来的，现在出版的任何力学教材都是这样处理。反之，“势能的减少量等于保守内力做的功”适用于小车系我们得不出经典势能公式适用于小车系，“势能的减少量等于保守内力做的功”比经典弹性势能公式更基本一些。根据我们计算的结果，小车系势能确实不能利用经典的弹性势能公式计算，“势能的减少量等于保守内力做的功”与势能公式的不等价是造成这场争论的根源所在，作为外势能

时（例如本题中弹簧固定在墙上）时，经典的弹性势能公式  $E_p = \frac{1}{2} kx^2$  仅仅适用于观察者在弹力所在直线上的分速度为0时的情形，当观察者在弹力所在直线上的分速度不为0时必须根据“势能的减少量等于保守

内力做的功”重新进行计算。文献[6]坚持认为弹性势能时弹簧的弹性势能，  $E_p = \frac{1}{2} kx^2$  适用于所有的惯性系，墙壁对于弹簧做功，进行定量计算，也得出了机械能不守恒的错误。

由于在本题中唯一的质点——小球仅受到一个保守力弹力的作用，下面给出一种更简洁的证法——在地面系和小车系，根据动能定理，设保守力做的功为  $W$ ， $W = E_{k1} - E_{k0}$ ， $E_{k1}$  是  $t_1$  时刻的动能， $E_{k0}$  是  $t_0$  时刻的动能。根据势能的定义， $W = E_{p0} - E_{p1}$ ， $E_{p1}$  是  $t_1$  时刻的势能， $E_{p0}$  是  $t_0$  时刻的势能。所以  $E_{k1} - E_{k0} = E_{p0} - E_{p1}$ ，所以  $E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0}$ 。机械能守恒定律成立，满足伽利略变换，也具有单独的协变性。由此可以进一步验证机械能守恒定律的条件非常简单——只有保守力做功。

### 参考文献:

- [1]李学生，师教民。对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷[J]。物理通报，2014，9：119~120。
- [2]赵凯华，罗蔚茵。新概念物理教程 力学[M]。北京：高等教育出版社，2000：124。
- [3]孟昭辉，运用机械能守恒定律解题的参照系问题——对“一道中学生物理竞赛试题答案的商榷”一文的不同意见，物理教师，2015年（2），94

- [4]梁绍荣, 刘昌年, 盛正华。普通物理学 第1分册 力学[M]。北京: 高等教育出版社, 1987: 164。  
[5]刘一贯。关于机械能守恒定律的协变性, 华南师范大学学报(自然科学版), 1985(1): 155~157。  
[6]郑金。对一道物理竞赛题的两种互异解答的探讨, 物理通报, 2015(7): 109~112。

**An Answer to the Mechanical Energy of a Spring Oscillator Relative to Moving Inertial Frame is not Conserved**  
——Comment on "Discussion on the answer of a middle school student's contest question"

**Abstract:** Illustrate that *the Mechanical Energy of a Spring Oscillator Relative to Moving Inertial Frame is not Conserved*——Comment on "Discussion on the answer of a middle school student's contest question" is wrong.

**Key words:** the physics contest; a spring oscillator; kinetic energy; potential energy; conservation of mechanical energy

5/4/2017