8. 椭圆运动星体机械能守恒问题新解

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）
xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘　要：重新解答了椭圆周运动的星体机械能守恒问题，得出了在直线匀速远离太阳的飞船上，环绕太阳椭圆周运动星体机械能守恒的新结论.

[李学生 (Li Xuesheng). 8**. 椭圆运动星体机械能守恒问题新解.** *Academ Arena* 2017;9(15s): 26-30]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 8. doi:10.7537/marsaaj0915s1708.

关键词：椭圆周运动星体；动能；势能；机械能守恒

中图分类号：O 313.1　　　　　　　　　　　　**文献标识码**：A

质量为 m 的地球（视为质点），在质量为 M 的太阳引力作用下，环绕太阳做长短半轴分别为 a，b 的椭圆周运动，有一宇宙飞船相对于太阳以恒速量值 u 沿直线远离太阳。在理想情况下，试问在太阳（太阳质量视为充分大，忽略其他星体的引力，故稳定地保持为惯性系）和宇宙飞船(视为质点)上观察，地球的机械能是否守恒，并说明理由。

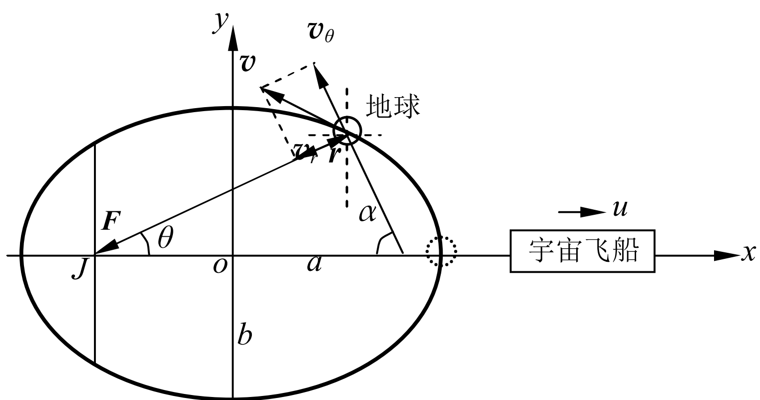


图 1　椭圆运动星体机械能守恒问题新解

解：**以太阳为参照系**时，以椭圆中心 o 为原点，直线 Jo 为 x 轴，垂直于 x 轴的直线 oy 为 y 轴，建立平面直角坐标系。设太阳位于椭圆左焦点 J 处，以 J 为极点，射线 Jo 为极轴，从太阳到地球的矢量 $\boldsymbol{r}$ 为极径，极径和极轴的夹角 θ 为极角建立平面极坐标系。极坐标系和直角坐标系如图 1 所示。

设地球的运动周期为 T，θ 对于时间 t 的导数为θ'，则：　由天文学知识可以得到椭圆运动星体的额运行周期为

T= $2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}$ ， $r^2\theta'$　2　$\frac{1}{2}r^2\theta'$　2　$\frac{\pi ab}{T}$　$\frac{2\pi ab}{2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}}$　$\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{GM}$　$\sqrt{GMep}$ 。

设**以太阳为参照系**时，地球从 t=0 时刻在极轴与椭圆的**右**交点处开始运动，t 时刻的径向线速度、横向线速度、线速度、动能、势能、机械能分别为：v_r，v_θ，v，$E_k(t)$，$E_p(t)$，$E(t)$；在宇宙**飞船上观察**时，t 时刻的径向线速度、横向线速度、线速度、动能、势能、机械能分别为：v_{1r}, $v_{1\theta}$, v_1,$E_{1k}(t)$,$E_{1p}(t)$,$E_1(t)$；则在**太阳**上观察时有：

$$r \quad \frac{ep}{1-e\cos\theta}, \quad 1 \quad e\cos\theta \quad \frac{ep}{r}, \quad (0 \quad e\sin\theta)\theta' \quad \frac{ep}{r^2} r' 。$$

$$v_r \quad r' \quad \frac{e\sin\theta}{ep} r^2\theta' \quad \sqrt{GMep}\,\frac{e\sin\theta}{ep} \quad \sqrt{\frac{GM}{ep}}\, e\sin\theta。$$

$$v_\theta \quad r\theta' \quad \frac{r^2\theta'}{r} \quad \frac{\frac{\sqrt{GMep}}{ep}}{1-e\cos\theta} \quad \sqrt{\frac{GM}{ep}}(1 \quad e\cos\theta).$$

$$v^2 \quad v_r^2 \quad v_\theta^2 \quad \frac{GM}{ep} e^2\sin^2\theta \quad \frac{GM}{ep}(1 \quad e\cos\theta)^2 \quad \frac{GM}{ep}(e^2\sin^2\theta \quad 1 \quad 2e\cos\theta \quad e^2\cos^2\theta)$$

$$\frac{GM}{ep}(1 \quad 2e\cos\theta \quad e^2) \quad \frac{GM}{ep}(2 \quad 2e\cos\theta \quad e^2 \quad 1) \quad \frac{GM}{ep} \quad 2(1 \quad e\cos\theta) \quad \frac{GM}{ep}(e^2 \quad 1).$$

$$E_k(t) = E_k'(\theta) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \frac{GMm}{ep}(1 \quad e\cos\theta) \quad \frac{GMm}{2ep}(e^2 \quad 1);$$

$$E_p(t) \quad E_p'(\theta) = \quad \frac{GMm}{r} \quad \frac{GMm}{ep}(1 \quad e\cos\theta);$$

$$E(t) \quad E_k(t) \quad E_p(t) \quad E_k'(\theta) \quad E_p'(\theta) =$$

$$\frac{GMm}{ep}(1 \quad e\cos\theta) \quad \frac{GMm}{2ep}(e^2 \quad 1) \quad \frac{GMm}{ep}(1 \quad e\cos\theta) \quad \frac{GMm}{2ep}(e^2 \quad 1)$$

$$= -\frac{GMm}{2}\cdot\frac{1-e^2}{ep} = -\frac{GMm}{2}\cdot\frac{1-(\frac{c}{a})^2}{(\frac{c}{a})\frac{b^2}{c}} = -\frac{GMm}{2}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= -\frac{GMm}{2a} 。$$

所以，**以太阳为参照系**时，地球的机械能守恒，守恒值为- $\frac{GMm}{2a}$ 。

另解——利用近日点和远日点的特点：速度和坐标轴垂直（极坐标），两点的机械能守恒，两点的动量矩（角动量）守恒：m$\mathbf{r_1 v_1}$=m$\mathbf{r_2 v_2}$=m**h**=**J**,即 $\mathbf{r_1 v_1 = r_2 v_2 = h}$.

在近日点机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} \quad E \qquad (1)$$

在远日点机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} \quad E \qquad (2)$$

（1）式乘 r_1^2 变为

$\frac{1}{2}mh^2$-r_1GMm r_1^2E （3）

（2）式乘 r_2^2 变为

$\frac{1}{2}mh^2$-r_2GMm r_2^2E （4）

（3）—（4）有 r_2GMm-r_1GMm= r_1^2E- r_2^2E，所以（r_2-r_1）GMm=（r_2-r_1）（r_2+r_1）E

又因为 $r_2 \neq r_1$，$r_2+r_1=2^a$，所以 E=— $\frac{GMm}{2a}$ 。

在宇宙**飞船**上观察时：

直觉判断：

因为地球的运动方向是变化的，当地球的运动速度与飞船的运动速度方向垂直时，**在宇宙飞船上观察**时，我们规定此时的势能相等，地球的机械能比在**太阳上观察**时增加 $\frac{1}{2}m(\quad u)^2 \quad \frac{1}{2}mu^2$，所以**在宇宙飞船上观察**时，地球的机械能为：$E_1(t) \quad E(t) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad \frac{GMm}{2a} \quad \frac{1}{2}mu^2$ 常数。

所以**在宇宙飞船上观察**时，地球的机械能守恒，守恒值为- $\frac{GMm}{2a} \quad \frac{1}{2}mu^2$.

数学推导：

$v_{1x} \quad v_x \quad u$，$v_{1x}^2 \quad v_x^2 \quad u^2 \quad uv_x$；$v_{1y} \quad v_y$，$v_{1y}^2 \quad v_y^2$；

$v_1^2 \quad v_{1x}^2 \quad v_{1y}^2 \quad v_x^2 \quad u^2 \quad u$（$v_r\cos\theta \quad v_\theta\sin\theta$）$v_y^2 \quad v^2 \quad u^2 \quad u(v_r\cos\theta \quad v_\theta\sin\theta)$.

$E_{1k}(t) \quad E_{1k}'(\theta)=\frac{1}{2}mv_1^2 \quad \frac{1}{2}mv^2 \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu \quad v_r\cos\theta \quad mu \quad v_\theta\sin\theta$

$E_k'(\theta) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu\sqrt{\frac{GM}{ep}}\,e\sin\theta\cos\theta \quad mu\sqrt{\frac{GM}{ep}}(1 \quad e\cos\theta)\sin\theta$

$\frac{GMm}{ep}(1 \quad e\cos\theta) \quad \frac{GMm}{2ep}(e^2 \quad 1) \quad \frac{1}{2}mu^2 \quad mu\sqrt{\frac{GM}{ep}}\sin\theta$。

$v_r \quad \frac{e\sin\theta}{ep} \quad r^2\frac{d\theta}{dt}$，$dt \quad \frac{e\sin\theta}{ep} \quad r^2\frac{d\theta}{v_r}$。

在宇宙飞船坐标系比太阳参照系增加的位移微分为$(\quad u)dt$ ，此时万有引力多做的功为

$\frac{GMm}{r^2}(\cos\theta)(\quad u)dt \quad \frac{GMmu}{r^2}(\cos\theta) \quad \frac{e\sin\theta}{ep} \quad r^2\frac{d\theta}{v_r}$

$$-\frac{GMmu}{ep}(e\sin\theta\cos\theta)\frac{d\theta}{-\sqrt{\frac{GM}{ep}}e\sin\theta}=mu\sqrt{\frac{GM}{ep}}\cos\theta\, d\theta.$$

$\frac{GMm}{r} \quad E_{1p}'(t) \quad \int_0^\theta mu\sqrt{\frac{GM}{ep}}\cos\theta d\theta \quad mu\sqrt{\frac{GM}{ep}}\sin\theta$。

$E_{1p}(t)\quad E_{1p}'(\theta)\quad \frac{GMm}{ep}(1\quad e\cos\theta)\quad mu\sqrt{\frac{GM}{ep}}\sin\theta$。

（当 u=0 时，$E_{1p}(t)= E_p(t)$，符合玻尔的对应原理。在宇宙飞船系测量的势能是 θ 的函数，即位置的函数，不是显含时间的力。）

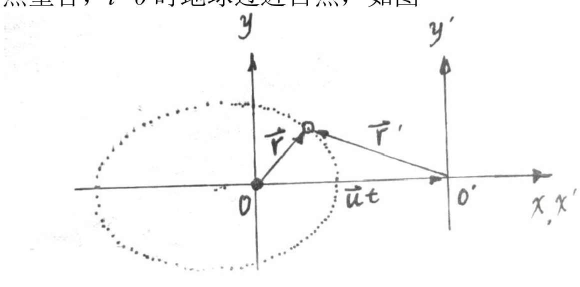
$E_1(t)\quad E_{1k}(t)\quad E_{1p}(t)\quad E_{1k}'(\theta)\quad E_{1p}'(\theta)=$

$\frac{GMm}{ep}(1\quad e\cos\quad\theta)\quad \frac{GMm}{2ep}(\ e^2\quad 1)\quad \frac{1}{2}mu^2\quad mu\sqrt{\frac{GM}{ep}}\sin\quad\theta\quad \frac{GMm}{ep}(1\quad e\cos\ \theta)\quad mu\sqrt{\frac{GM}{ep}}\sin\theta$

$\frac{GMm}{2ep}(e^2\quad 1)\quad \frac{1}{2}mu^2\quad \frac{GMm}{2a}\quad \frac{1}{2}mu^2$。

所以，**在宇宙飞船上观察**时，地球的机械能守恒，守恒值为— $\frac{GMm}{2a}\quad \frac{1}{2}mu^2$。当 **u**=0 时两个坐标系重合，守恒值相等，符合玻尔的对应原理。

另解：我们采用矢量式坐标变换关系，并假定飞船速度 ***u*** 在地球轨道平面内沿 *x* 轴方向，*t=0* 时两坐标系原点重合，*t=0* 时地球过近日点，如图



$$\begin{cases} \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t \\ d\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}dt \\ \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u} \\ \mathbf{a}=\mathbf{a}' \\ \boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}' \end{cases}$$

全部采用矢量运算，按定义，在日心系地球动能、势能和机械能分别为

$$E_k\quad \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \tag{1}$$

$$E_p=-\int_r^{\infty}\frac{GMm}{r^2}dr=-GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}=-\frac{GMm}{r} \tag{2}$$

$$E_p(t)\quad E_k(t)\quad \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\ —\ \frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2a}=E \tag{3}$$

(3)式即地球轨道运动的机械能守恒定律，即（Ⅰ）式。

在宇宙飞船系，地球的动能、势能和机械能分别为

$$E'_k(t)\quad \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2\quad \frac{1}{2}m（\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{u}）^2\quad \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\quad m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\quad \frac{1}{2}mu^2 \tag{4}$$

$$dE'_p=-\mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}' \quad -\mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} \quad \mathbf{f}\cdot \mathbf{u}dt \quad \frac{GMm}{r^2}\,d\mathbf{r} \quad \frac{md\mathbf{v}}{dt}\cdot \mathbf{u}dt=-\frac{GMm}{r^2}\,d\mathbf{r} \quad m\mathbf{u}\cdot d\mathbf{v}$$

$$E'_p=\frac{mGM}{r} \quad m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{C}$$

因为当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 时两个坐标系重合，根据玻尔的对应原理势能相等 $E'_p=E_p=\frac{mGM}{r}$，

所以 C=0，$E'_p=\frac{mGM}{r} \quad m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$ （5）

$$E'_p(t) \quad E_k'(t) \quad \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - \frac{GMm}{r}+\frac{1}{2}m\boldsymbol{u}^2=-\frac{GMm}{2a}+\frac{1}{2}m\boldsymbol{u}^2=\mathrm{E}+\frac{1}{2}m\boldsymbol{u}^2=\mathrm{E}' \quad (6)$$

式（3）和式（6）比较可见，地球(质点)机械能守恒定律在各惯性系都成立。

经典万有引力势能公式的局限性分析

当 u=0 时，$E_{1p}(t)=E_p(t)$，符合玻尔的对应原理，这说明万有引力势能和重力势能一样具有相对性。周衍柏《理论力学教程》（1979 年第一版，人民教育出版社）第 47 页"由于物体间相对位置发生变化所具有的能量，通常叫做势能。"这里势能应该是指内势能，具有伽利略变换的不变性，在内势能中如果二者质量差别极大，例如本文中的太阳和地球（质量相差悬殊），此时可以把质量较大的物体的质量视为无穷大，可以认为是质量较小物体的外势能，外势能不具有伽利略变换的不变性，但是机械能守恒定律具有伽利略变换的不变性, 这是经典力学在公理化的过程中向前迈进的一小步。对于势能属于系统应该全面理解，特殊情况下认为外势能存在(这是一种数学处理方法)，量变引起了质变。

300 多年来人们一直认为外势能差具有伽利略变换的不变性，这是机械能守恒定律与力学相对性原理关系争论的根源所在,不完全归纳法得出的结论不一定是普遍的真理。**如果我们这样认识经典力学，去除了一些错误的认识，经典力学便显得更加和谐。如果考虑到这一点，原来各家杂志上对于这个问题的争议便全部迎刃而解。**正如爱因斯坦所讲的："从原始的文献中追踪理论的形成过程，往往会对于事物的本质产生更加深刻的认识。"

主要结论——通过本文得出了关于万有引力的外势能的机械能守恒定律不但满足力学相对性原理，而且也具有单独的协变性。对于内势能，势能差是伽利略变换的不变量；对于外势能，势能差不是伽利略变换不变量，经典力学没有明确指明，才导致了这场争论，使人们发生了误解,这不是经典力学的错误。

说明：上面是以太阳和地球为例说明引力机械能满足力学相对性原理，因为地球的质量和太阳质量相去甚远，因此太阳可以视为惯性系（近似成立）。当两个星体的质量差别不是很大时，可以以较大星体为参照系，较小星体的质量用它们的折合质量代替即可，就可以得到与上面类似的结论,此时严格讲应该为内势能。

参考文献：

[1]白静江。 两体问题中的功能原理及机械能守恒定律［J］，大学物理，1997，（16）3:11-14

[2]蔡伯濂。 关于力学相对性原理与机械能守恒的来稿综述。 大学物理，1994（1）

[3]Santos FC, Soares V and Tort AC. A note on the conservation of mechanical energy and the Galilean principle of relativity[J]. European Journal of Physics. 2010,31(4):827-834

Brand-new explanation of mechanical energy conservation of celestial body moving in ellipse orbit

Abstract: It refurbished the issue of mechanical energy conservation of celestial body moving in ellipse orbit, which straightforwardly led to conclusion, no matter we take reference frame of the sun itself or earth flying away from the sun in uniform speed, the mechanical energy of celestial body moving in ellipse orbit around the sun is always conservative.

Key words: celestial body moving in ellipse orbit; kinetic energy; potential energy; mechanical energy conservation

5/4/2017