7. 引力机械能守恒定律在各惯性系都成立

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授，理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员（作者为中国科学院高能物理所研究员）
xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘　要：本文讨论万有引力机械能守恒定律在各惯性系都成立的问题.

[李学生 (Li Xuesheng). **7. 引力机械能守恒定律在各惯性系都成立.** *Academ Arena* 2017;9(15s): 23-25]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 7. doi:10.7537/marsaaj0915s1707.

关键词：动能；势能；机械能；伽利略变换
中图分类号：O 313.1　　　　　　　　**文献标识码**：A

一、引言

重力机械能守恒定律和弹性机械能守恒定律在各惯性系都成立的问题，文[1] [2]已经讲明白了，本文讨论引力机械能守恒定律在各惯性系都成立的问题。

以地球绕太阳运动为例讨论万有引力机械能守恒定律是否在各惯性系都成立的问题，以往有人认为是两体问题，由于太阳相对两体质心会有微小的加速度，由此认为日心坐标系不是严格的惯性系，仅当假定太阳质量充分大时，日心坐标系才是严格的惯性系[3] [4]，如果这样考虑以太阳为坐标系引力机械能也不守恒，必须以太阳和地球的质心为参照系机械能才守恒，但是由于地球的质量与太阳的质量相去甚远，这个影响可以忽略。如果我们再忽略非保守力所做的功，地球的机械能守恒。行星轨道运动的机械能守恒定律可以统一写成，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=E \qquad (\mathrm{I})$$

$$E_k(t)+E_p(t)=E \qquad (\mathrm{II})$$

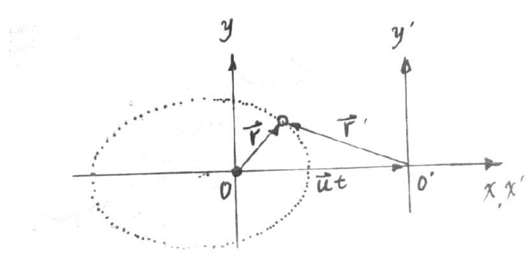
其中 v 为 t 时刻在日心系行星轨道速度矢量的模，m 为行星质量，r 为 t 时刻行星坐标矢量的模，M 为太阳系总质量而非太阳质量，G 为万有引力常数，$E<0$ 为行星轨道运动的机械能，是个常数 $E=-\frac{GMm}{2a}$，a 为椭圆运动轨道的半长轴。

二、引力机械能守恒定律在各惯性系都成立

选择相对日心匀速直线运动的宇宙飞船系为另一个惯性系，则两坐标系坐标变换关系为

$$\begin{cases} x=x'+\boldsymbol{u}t \\ y=y' \\ t=t' \end{cases}$$

为简洁明白，我们采用矢量式坐标变换关系，并假定飞船速度 $\boldsymbol{u}$ 在地球轨道平面内沿 x 轴方向，$t=0$ 时两坐标系原点重合，$t=0$ 时地球过近日点，如图



$$\begin{cases} \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t \\ \end{cases}$$

$\boldsymbol{dr}=d\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}dt$

$\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$

全部采用矢量运算，按定义，t 时刻在日心系地球动能、势能和机械能分别为

$$E_k \quad \frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

$$E_p=-\int_r^{\infty}\frac{GMm}{r^2}dr=-GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}=-\frac{GMm}{r} \tag{2}$$

所以 $E_p(t) \quad E_k(t) \quad \frac{1}{2}mv^2 \quad — \frac{GMm}{r} \quad =- \frac{GMm}{2a} \quad =E$ （3）

(3)式即地球轨道运动的机械能守恒定律，即（Ⅰ）式。

在宇宙飞船系，t 时刻地球的动能、势能和机械能分别为

$$E'_k(t) \quad \frac{1}{2}mv'^2 \quad \frac{1}{2}m（\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{u}）^2 \quad \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \quad m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} \quad \frac{1}{2}m\boldsymbol{u}^2 \tag{4}$$

$$dE'_p=（-\mathbf{f}）\cdot d\mathbf{r}' \quad （-\mathbf{f}）\cdot d\mathbf{r} \quad \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}dt \quad \frac{GMm}{r^2}dr \quad \frac{md\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\mathbf{u}dt=\frac{GMm}{r^2}dr \quad m\mathbf{u}\cdot d\mathbf{v}$$

$$E'_p=\frac{mGM}{r} \quad m\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+C$$

由于 **u=0** 时，飞船坐标系和太阳坐标系重合，根据玻尔的对应原理可知

$E'_p=E_p=\frac{mGM}{r}$，所以 C=0，$E'_p=\frac{mGM}{r} \quad m\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ （5）

$E'_p(t) \quad E_k'(t) \quad \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \; - \frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}m\boldsymbol{u}^2=-\frac{GMm}{2a}+\frac{1}{2}m\boldsymbol{u}^2=E'$ （6）

式（3）和式（6）比较可见，地球(质点)机械能守恒定律在各惯性系都成立。

另证：在太阳坐标系和宇宙飞船坐标系，由于地球仅仅受到保守力---万有引力的作用，根据动能定理，设保守力做的功为 W , W=E_{k1}—E_{k0}，E_{k1} 是 t_1 时刻的动能，E_{k0} 是 t_0 时刻的动能。根据势能的定义，W =E_{p0}—E_{p1}，E_{p1} 是 t_1 时刻的势能，E_{p0} 是 t_0 时刻的势能。所以 E_{k1}—E_{k0}= E_{p0}—E_{p1}，所以 $E_{k1}+E_{p1}= E_{k0}+E_{p0}$ 。引力机械能守恒定律成立，满足力学相对性原理，具有伽利略协变性，也具有单独的协变性。

三、结语

（1）机械能守恒定律成立的条件并不像文献[5]说的那样错综复杂，而是非常简单明确的——仅当不存在任何非保守力作用或非保守力所做之功可以忽略时，我们才可以认为系统的机械能是守恒的。

（2）什么是“系统”？“系统”就是研究对象，不是参考系。系统可以是质点组，也可以是质点。例如研究自由落体问题时，研究对象就是落体，系统不包括参考物地球。当我们研究弹簧振子问题时，系统就是弹簧加小球，不包括参考物地球或小车。当我们研究地球轨道运动时，系统就是地球(质点)，系统不包括参考物太阳。 势能属于系统是正确的，但是由于地球的质量与太阳的质量相去甚远，把太阳的质量考虑在内结果影响不大，而且我们不知道太阳的确切质量，因此可能出现误差更大的问题。当行星质量较大时（例如木星）可以利用太阳和木星的折合质量代替木星的质量计算。

周衍柏《理论力学教程》（1979 年第一版，人民教育出版社）第 47 页“由于物体间相对位置发生变化所具有的能量，通常叫做势能。”这里势能应该是指内势能，具有伽利略变换的不变性，在外势能中如果二者质量差别极大，外势能不具有伽利略变换的不变性，但是机械能守恒定律具有伽利略变换的不变性。对于势能属于系统应该全面理解，特殊情况下认为外势能存在(这是一种数学处理方法)，量变引起了质变。在这个问题中按照内势能处理也可以，只不过运算比较复杂，此时太阳坐标系就不再是惯性系，系统的质心和相

对于质心匀速运动的观察者才是惯性系。作为外势能处理时，太阳坐标系和相对于太阳匀速运动的飞船坐标系是惯性系,考虑势能时不能再计算保守力做功。

（3）朗道的书《力学》中说，在惯性参考系中自由运动的质点，由于时间和空间的均匀性和各向同性，表征它所用的拉格朗日函数不显含时间和广义坐标和速度的方向。在这个问题中引力场场强是位置的函数，不能认为是显含时间的力，在拉格朗日函数中只要是显含时间的力，能量肯定不守恒。

（4）“$E'_p = \frac{mGM}{r}$ $m\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ 和 $E_p = -\frac{GMm}{r}$”并不始终相等，只有当宇宙飞船的相对于太阳的速度为 **0** 时即两个坐标系重合时势能才始终相等，符合玻尔的对应原理。经典的引力势能公式 $E_p = -\frac{GMm}{r}$ 只是一个特例（适用于观察者相对于引力源的速度为 0），它不是定义式，是在特定条件下推导出来的，并非对于所有的观察者都成立，我们没有理由认为其它情况下也成立,需要根据势能的定义（保守力做的功等于势能的减少）重新进行计算。从数学上讲，不完全归纳法得到的结论未必一定是正确的，300 年来人们一直把二者当成充要条件，才导致了这个问题争论 50 多年。在分析这个问题时不能在太阳坐标系系用外势能机械能守恒定律，在飞船坐标系用内势能机械能守恒定律，考虑惯性力做功[4]，前后不自洽，在惯性系里不可能观测到惯性力。如果我们这样认识经典力学，剔除了一些错误的认识，经典力学便显得更加和谐。

如果坚持 $E_p = -\frac{GMm}{r}$ 适用于所有情况，由于两点间的距离是伽利略变换不变量，因此参考文献[4] [5] 坚持认为引力势能对于不同的观察者不变，才出现了机械能不守恒的错误结论，可是我们又找不出能量的来源和消失的途径。 这个问题在国际上也比较纠结[6].

参考文献

[1]赵文桐，刘文芳，刘明成。重力机械能守恒定律在各惯性系都成立。 物理通报，2015(3)。
[2]李学生，师教民。对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷。 物理通报，2014（9）:119～120。
[3]蔡伯濂。关于力学相对性原理与机械能守恒的来稿综述。 大学物理，1994（1）。
[4]白静江。两体问题中的功能原理及机械能守恒定律。 大学物理，1997（3）。
[5]蔡伯濂。关于讲授功和能的几个问题，工科物理教学，1981（1），7～13。
[6]Santos FC, Soares V and Tort AC. A note on the conservation of mechanical energy and the Galilean principle of relativity[J]. European Journal of Physics. 2010,31(4):827-834.

5/4/2017