

5. 重力势能不具有伽利略变换的不变性

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授, 理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员, 中国民主同盟盟员 (作者为中国科学院高能物理所研究员)

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要: 重新解答了竖直下抛物体机械能守恒问题, 得出了在地面上和相对于地面做匀速运动的电梯上, 竖直下抛物体机械能都守恒的新结论.

[李学生 (Li Xuesheng). 5. 重力势能不具有伽利略变换的不变性. *Academ Arena* 2017;9(15s): 16-19]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 5. doi:[10.7537/marsaaj0915s1705](https://doi.org/10.7537/marsaaj0915s1705).

关键词: 竖直下抛物体; 动能; 势能; 机械能守恒

中图分类号: O 313.1

文献标识码: A

以相对于地面的恒速 u 竖直下降的电梯 (忽略空气阻力等非保守力, 后面的几篇文章相同, 不再说明), 在高为 h 的天空, 以相对于电梯为 0 的初速度投下质量为 m 的物资 G (视为质点), 试问在电梯上和地面上观察 (地球质量视为充分大, 故稳定地保持为惯性系), 物资 G 的机械能是否守恒, 并说明理由.

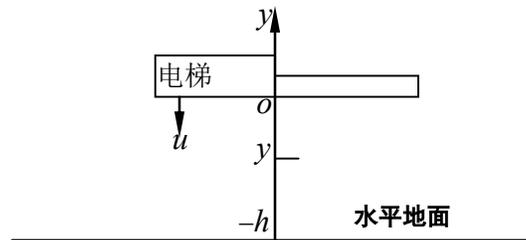


图 1 下落运动物体机械能守恒问题新解

解: 以物资 G 开始下落点 o 为坐标原点, 过 o 的竖直向上的垂直于水平地面的直线为 y 轴, 建立竖直直线坐标系如图 1 所示。设最高点的势能为 0。

设在电梯上观察时, 物资 G 从 $t=0$ 时刻开始下落, t 时刻的高度、速度、加速度、动能、势能、机械能分别为: $y, v, a, E_k(t), E_p(t), E(t)$; 在地面上观察时, 物资 G 在 t 时刻的高度、速度、加速度、动能、势能、机械能分别为: $y_1, v_1, g, E_{1k}(t), E_{1p}(t), E_1(t)$ 。则在电梯上观察 (即以电梯为静止系) 时有:

$$y_1 = y - ut \quad (h \leq y, y_1 \leq 0), \quad v_1 = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy}{dt} - u = v - u, \quad g = \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv}{dt} = a, \quad dv = gdt, \\ v = gt + C.$$

将初始条件 $t=0$ 时 $v=0$ 代入上式得:

$$0 = g \cdot 0 + C, \quad C = 0, \quad v = gt + C = gt, \quad \frac{dy}{dt} = v = gt, \quad dy = gtdt, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + C.$$

将初始条件 $t=0$ 时 $y=0$ 代入上式得:

$$0 = \frac{1}{2}gt^2 + C, \quad C = 0, \quad y = \frac{1}{2}gt^2, \quad \frac{1}{2}gt^2 = 0, \quad \frac{1}{2}gt^2, \quad y = \frac{1}{2}gt^2, \quad t^2 = \frac{-2y}{g},$$

$$t = \frac{\sqrt{-2y}}{\sqrt{g}}$$

$$v = gt = \frac{g}{\sqrt{g}} \frac{\sqrt{-2y}}{\sqrt{g}} = \sqrt{-2gy}, \quad v^2 = 2gy.$$

$$E_k(t) = E_k'(y) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2gy) = mgy; \quad E_p(t) = E_p'(t) = mgy \text{ 或 } E_p(t) = E_p'(t) = 0 \text{ may } mgy.$$

所以，在电梯上观察时，物资 G 的机械能守恒，守恒值为 0。

$$\text{在地面上观察时: } v_1^2 = (v-u)^2 = v^2 + u^2 - 2uv = 2gy + u^2 - 2u\sqrt{-2gy}.$$

$$E_{1k}(t) = E_{1k}'(y) = \frac{1}{2}mv_1^2 = mgy + \frac{1}{2}mu^2 - mu\sqrt{-2gy}.$$

$$-E_{1p}'(y) = mg(y_1 - 0) = mg$$

$$y_1 = mg(y - ut) = mgy - mgu = \frac{g}{\sqrt{g}} \frac{\sqrt{-2y}}{\sqrt{g}} - mu = \sqrt{-2gy} - mu.$$

$$E_{1p}(t) = E_{1p}'(y) = mgy - mu\sqrt{-2gy} = mgh + mv \cdot u.$$

$$E_1(t) = E_{1k}(t) + E_{1p}(t) = E_{1k}'(y) + E_{1p}'(y) = mgy + \frac{1}{2}mu^2 - mu\sqrt{-2gy} + mgy - mu\sqrt{-2gy} = \frac{1}{2}mu^2 \text{ 常数}.$$

所以，在地面上观察时，物资 G 的机械能守恒，守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$ 。当 $u=0$ 时两个坐标系重合，守恒值相等，符合玻尔的对立原理。

说明：1、朗道的书《力学》中说，在惯性参考系中自由运动的质点，由于时间和空间的均匀性和各向同性，表征它所用的拉格朗日函数不显含时间和广义坐标和速度的方向。在这个问题中重力场是匀强场，场强是位置的函数，不能认为是显含时间的力，在拉格朗日函数中只要是显含时间的力，能量肯定不守恒。如果认为是显含时间的力，“如果观察者在水平方向相对于地面系匀速运动，机械能显然守恒”不好理解。

2. “ $E_{1p}(t) = E_{1p}'(y) = mgy - mu\sqrt{-2gy} = mgh + mv \cdot u$ 和 $E_p(t) = E_p'(y) = mgy$ ”（笔者注：类似可以推导万有引力势能的一般公式，经典的势能公式也是只适用于观察者在引力方向上的分速度为 0 的情形）并不始终相等，只是在初始状态 $y=0$ 时相等（原因在于初始状态选择的零势能面相同，初始状态的零势能面也可以选择不相同，只不过守恒值不一样，但是也是守恒的，有可能任何时刻的势能值都不相等。在这里为了比较地面系和电梯系守恒值之间的关系，初始状态的零势能面选择相同。），不相等的原因在于对于不同惯性系的观察者而言，零势能面可以不同。

3. 对应原理是物理学的原理，于 1923 年被玻尔提出，指在量子数很大而改变很小的情况下，量子理论所得的结果应趋近于经典物理学的结果，反之亦然。在任何的物理量 F 与作用量 J 作偏导数，在上述条件下，

应有： $\frac{\partial F}{\partial J} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta n} \frac{\Delta F}{\Delta n}$ ，其中 $J = n\hbar$ （玻尔-索末菲量子条件）， \hbar 是普朗克常数。量子力学理论可以成功精确的描述微观世界的物体（例如原子以及基本粒子），而宏观的物体（例如弹簧、电阻等）则可以用经典力学和经典电动力学所描述。矛盾在于，同一个物理世界，仅仅因为物体大小的不同，就需要不同的两个理论来描述，这显然是荒谬的。这一矛盾就是玻尔阐述对应原理的初衷，即在系统“大”的情况下，经典物理学可以认为是量子物理学的一个近似。当且仅当 $u=0$ 时，二者始终相等，这也符合玻尔的对立原理，经典的重力势能公式 $E_p=mgh$ 只是一个特例（适用于质点所受到的合力等于重力，观察者在竖直方向上分速度为 0），它不是定义式，是在上述条件下推导出来的，并非对于所有的观察者都成立，需要根据重力势能的定

义重新进行计算（公式不必记忆，只要知道如何计算即可）。

4. 零势面只要相对于该观察者不变即可，并非相对于重力源-地球不变，这是力学相对性原理所要求的，电梯里的零势点是地面系零势点的伽利略像点(后面几个问题的分析也存在这个问题，不再说明)。在电梯里的观察者无需给地面的观察者打电话，询问他所选择的零势面，只要选择自己的零势面即可，只要在他的坐标系力机械能守恒即可,爱因斯坦创立广义相对论的时候也是利用类似的思维---电梯里的观察者无需知道外面的观察者的坐标系如何建立，伽利略当年设计的大船实验时也无需打电话询问地面系的坐标系如何建立。例如在一个相对于地面匀速降落的封闭的电梯内有一位观察者，电梯的顶端有一个小球（视为质点），某一时刻小球从顶端下落，忽略空气阻力和小球与电梯底部碰撞的能量损失，该观察者测量小球的机械能守恒，地面上的观察者测量小球的机械能守恒，他们各自选择自己的零势面，电梯里面的观察者根本不知道小球与地面的距离以及电梯相对于地面的速度。

5. 在分析这个问题时不能在地面系用外势能机械能守恒定律（把地球质量认为无穷大），在电梯系用内势能机械能守恒定律（把地球质量视为有限值），考虑惯性力，前后不自洽。

6. 经典理论认为：物体由于被举高而具有的能叫做重力势能。对于重力势能，其大小由地球和地面上物体的相对位置决定。物体的质量越大、相对的位置越高、做的功越多，从而使物体具有的重力势能变大，它的表达式为： $E_p=mgh$ 是根据“重力势能的增加等于物体克服保守力所做的功”推导出来的，因此如果后者错误，前者显然是错误的，但是其中前者与后者不是充要条件，前者的推导增加一个条件（观察者在竖直方向上的速度为0）。我们在推导前者时，物体所受的合力等于重力，观察者相对于地面静止或者在水平方向上匀速运动，并没有在观察者竖直方向上匀速运动的情况下推导，我们没有理由认为其它情况下也成立。从数学上讲，不完全归纳法得到的结论未必一定是正确的，300年来人们一直把二者当成充要条件，才导致了这个问题争论多年，自由落体问题中电梯系只能利用“重力势能的减少等于保守力所做的功”计算。如果我们这样认识经典力学，剔除了一些错误的认识，经典力学便显得更加和谐。如果考虑到这一点，原来各家杂志上对于这个问题的争议便全部迎刃而解，请读者自行分析，本文从略。

后面关于弹簧问题、万有引力问题的分析也存在上面类似的问题，不再重复。

笔者认为：物体的势能减少量等于物体克服保守力做的功，地面上的地球重力势能公式是在地面上推导出来，当观察者在力的方向上分速度不相等时，计算保守力做的功不相等，因此势能也应该不相等。势能属于系统是是正确的，但是由于地球的质量极大（相对于普通的力学实验物体），因此地球的运动对于系统的影响甚微，可以忽略不计,因此本文假设为充分大。

如果坚持 $E_p=mgh$ 适用于所有情况，由于两点间的距离是伽利略变换不变量，因此参考文献中的文章坚持认为重力势能对于不同的观察者不变，才出现了机械能不守恒的错误结论，可是我们又找不出能量的来源和消失的途径。

因为势能是一个标量（数量），因此 $E_p=mg \cdot s$ ， s 是观察者测量的位移，对于不同的惯性系测量的质点的位移可以不相等，因此对于不同的观察者测量的势能可以不相等。为了解释这个问题人们提出了机械能守恒定律可以不满足力学相对性原理或者满足力学相对性原理，但不具有单独协变性的错误的理论，或者在功能原理中排出外势能的存在。势能属于系统是是正确的，但是由于一般物体的质量与地球的质量相去甚远，把地球的质量考虑在内结果影响不大，而且我们不知道地球的确切质量，因此可能出现误差更大的问题。

周衍柏《理论力学教程》（1979年第一版，人民教育出版社）第47页“由于物体间相对位置发生变化所具有的能量，通常叫做势能。”这里势能应该是指内势能，具有伽利略变换的不变性，在外势能中如果二者质量差别极大，例如本题中的地球和物体，此时可以把质量较大的物体的质量视为无穷大，可以认为是质量较小物体的外势能（此时的系统误差远远小于由于地球质量测量误差造成的误差小得多，由于证明比较简单，本文从略），外势能不具有伽利略变换的不变性，但是机械能守恒定律具有伽利略变换的不变性。由于一般物体的质量与地球质量相去甚远，因此重力势能不必考虑内势能，直接按照外势能计算即可。对于势能属于系统应该全面理解，特殊情况下认为外势能存在(这是一种数学处理方法)，量变引起了质变。在这个问题中按照内势能处理也可以，只不过运算比较复杂，此时地面系就不再是惯性系，系统的质心和相对于质心匀速运动的观察者才是惯性系。作为外势能处理时，地面系和相对于地面匀速运动的观察者才是惯性系,考虑势能时不能再计算保守力做功。

7、我们可以考察这样一个问题，一个带电粒子受到水平方向和竖直方向两个匀强电场，竖直方向的匀强电场的作用恰好抵消掉重力场。电荷从静止开始运动（忽略粒子的波动性），一个观察者开始相对于电荷静止，他所测量的粒子的电势能和动能之和不变，一个观察者沿着水平方向匀速运动，他所测量的粒子的电势能与动能之和也不变，这样可以得出电势差（电压）也具有相对性。现在国外的力学教材，也把这样的电

势能与动能之和叫做机械能。

光速不变性的争论导致了狭义相对论的诞生,机械能守恒定律与力学相对性原理关系的争论使我们认识到经典的势能公式有一定的适用范围,即关于重力势能的外势能公式不具有伽利略变换的不变性,但是机械能守恒定律具有伽利略变换的不变性,这是经典力学在公理化的过程中向前迈进的一小步。爱因斯坦说过:“在对科学的志趣中,必须一而再、再而三地从事对这些基本概念的批判,为了我们可以不无意识地受到它们的支配。没有一个人会肯定地认为牛顿的伟大创造会真正地被这种或其他任何一种理论所代替,他的清晰和广阔的观念作为我们已经建立的现代物理学观念的基础将永远保持它们的意义。”科学的生命力就在于它能面对新的观测事实,不断地发展和完善自己的结构和框架。爱因斯坦有一次在评价自己的相对论时说过:“(它)肯定会让位给另外的理论,虽然其具体的理由我们目前尚未臆测,我相信深化理论的过程是没有止境的。”

主要结论——对于内势能势能差是伽利略变换的不变量,对于外势能势能差不是伽利略变换不变量,经典力学没有明确指明,才导致了这场争论,使人们发生了误解,不是经典力学本身的错误。说得更本质一些,正是因为重力势能的相对性造成了这个现象,经典的重力势能公式仅适用于观察者在弹力所在直线上的分速度为0时的情形,即关于重力势能的外势能公式不具有伽利略变换的不变性,机械能守恒定律具有伽利略变换的不变性,通过本文得出了关于重力势能的机械能守恒定律不但满足力学相对性原理,而且具有单独的协变性。

参考文献:

- [1]管靖。力学相对性原理与机械能[J]。大学物理,1991,(10)11: 21-24。
- [2]高炳坤。一个保守力做的功等于势能的减少吗[J]。大学物理,2001,(20)5: 19-20,30。
- [3]吴慎山,苏本庆,张玉中,吴东芳。对参考系与惯性力中一些问题的分析[J]。河南师范大学学报(自然科学版),2002,(30)2: 1-4。
- [4]高炳坤,谢铁曾。地球所受的一种易被忽视的惯性力[J]。大学物理,1991,(10)11: 46。
- [5]白静江。两体问题中的功能原理及机械能守恒定律[J]。大学物理,1997,(16)3: 11-12。
- [6]王宗谟。参考系平动变换中的动能定理和机械能守恒定律[J]。物理教师,2001,(22)1: 14,16。
- [7]蔡伯谦。关于力学相对性原理和机械能守恒定律来稿综述[J]。大学物理,1994,(13)1: 20-22。
- [8]谭昌炳。机械能定理和力学相对性原理[J]。三峡大学学报(自然科学版),2005,(27)1: 92-96。
- [9]郑理。动惯性系中的功能原理和机械能守恒定律。河北能源职业技术学院学报,2002(9): 80-82
- [10]冯伟。机械能守恒定律与参照系——对力学中一个问题的讨论,承德民族师专学报,1986(4)。
- [11]赵文桐,刘文芳,刘明成。重力机械能在各惯性系都成立,物理通报,2015(3)。

External potential of gravitational potential does not satisfy invariability of Galileo transformation

Abstract: It refurbished the issue of mechanical energy conservation of the falling object, which straightforwardly led to conclusion, no matter we take reference frame of the earth itself or the elevator moving in uniform speed to the earth, the mechanical energy of the falling object is always conservative.

Key words: the falling object; kinetic energy; potential energy; conservation of mechanical energy.

5/4/2017