狭义相对论中万有引力也是保守力

李学生 (Li Xuesheng)
1922538071@qq.com

Abstract: 引力是保守力，这是引力最重要的一个物理性质，这个性质在牛顿力学里已被证明了.现在有一个问题，引力是保守力这一性质，在相对论的情况下，还能够成立吗？**机械能守恒定律在狭义相对论中也是成立的，机械能守恒定律不但满足力学相对性原理也满足狭义相对论性原理**.

[李学生. **狭义相对论中万有引力也是保守力.** *Academ Arena* 2014;6(8):68-69]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 9

Keywords: 狭义相对论; 万有引力; 保守力; 牛顿; 自然哲学

牛顿作为伟大的科学家， 1726 年在《自然哲学之数学原理》（引自陕西人民出版社和武汉出版社出版的2001年版本,以下称《原理》）第三版的“总释”中写到：“迄此为止我们以引力作用解释了天体及海洋的现象，但还没有找出这种作用的原因.它当然必定产生于一个原因……但我迄今为止还无能为力于从现象中找出引力的这些特性的原因，我也不构造假说……”.R. P. Feynman在讲到Newton 引力定律时说，“而真的就是这样一条简单的定律吗？它的机制（machinery）是什么？我们做过的一切，只是描写了地球怎样绕太阳转，可没有说过其缘由何在（but we have not said what makes it go.），Newton 对此无假设，他只满足于找出引力都干了些什么，而未能深入下去.”自然界中的许多力，例如重力、弹性力、静电力等都是保守力，摩擦力、流体的粘性力等都是非保守力.

引力是保守力，这是引力最重要的一个物理性质，这个性质在牛顿力学里已被证明了.现在有一个问题，引力是保守力这一性质，在相对论的情况下，还能够成立吗？对于这个问题，我们可以证明一个定理.

定理 1：任意一个静态球对称星球的引力场是一个保守力场，这一结论，无论是对牛顿力学还是对相对论，都是正确的.

证明：首先证明在牛顿力学的情况下定理1成立.给定一个质量为M，半径为R的星球，并假设星球的质量是均匀分布的，再给定一个静止质量为m_0的质点，m_0<<M，下面研究质点m_0在星球引力作用下的运动规律，由于我们讨论的引力场是球对称的情况，因此可进一步假设质点m_0只在星球的径向做直线运动.首先将球坐标系固定在星球M上，并令坐标原点与星球球心相重合.在牛顿力学中，质点质量是一个常量，根据牛顿第二定律和万有引力定律，质点运动方程为：$m_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{GMm_0}{r^2}$ （1）.牛顿引力场的能量守恒方程 $m_0\frac{u^2}{2}+m_0\varphi=0$ （2），从能量守恒方程（2）可以得出，质点运动时其动能与势能之和等于常数，质点运动只同质点的起始和终了位置有关，而同质点运动的路径无关.这表明在牛顿力学情况下，引力场是一个保守力场.

下面讨论相对论的情况.

我们知道，牛顿理论只能用于质点运动速度远小于光速的情况.当引力场很强时，在引力作用下的质点运动速度与光速相比不再是一个可忽略的小量，此时质点的质量也不再是一个常量，而是一个随速度变化的变量.在这种情况下，需要对牛顿力学的质点运动方程（1）进行修正，我们需要把狭义相对论中质量随速度变化的规律考虑进去，我们可以得出如下形式的质点运动方程：$\frac{\mathrm{d}(mu)}{\mathrm{d}t}=-\frac{GMm}{r^2}$ （3），根据狭义相对论的质量公式：$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ （4），将公式（4）代入公式（3），整理后可得：$m_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{GMm_0}{r^2}(1-\frac{u^2}{c^2})$ （5），公式（5）是考虑了相对论效应后，质点在星球引力作用下的运动方程，我们可将公式（3-5）的右端理解为万有引力在相对论中的推广，即：$F=-\frac{GMm_0}{r^2}(1-\frac{u^2}{c^2})$ （6），公式（6）中的F，实际上并不全是引力，其中也包括由

质量变化引起的惯性附加力，不过根据相对论中的等效原理，惯性力可以等效于引力，因此，今后我们将 F 称为等效引力. 由于在静态球对称情况下，速度 u 只是 r 的函数，因此我们有：$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$ (7), 将（7）代入（5）可得：$\frac{u\mathrm{d}u}{1-\frac{u^2}{c^2}}=-\frac{GM}{r^2}\mathrm{d}r$ (8), 对上式积分，同时代入边界条件：r =∞时，u=0 积分后可得：$\ln(1-\frac{u^2}{c^2})=-\frac{2GM}{rc^2}$ (9), 由公式（9）可得 $1-\frac{u^2}{c^2}=\exp(-\frac{2GM}{rc^2})$ (10), 将公式（10）代到公式（5）中 $m_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{GMm_0}{r^2}\exp(-\frac{2GM}{rc^2})$ (11), 将公式（10）代入公式（6），我们又可以得到等效引力的另一种形式 $F=-\frac{GMm_0}{r^2}\exp(-\frac{2GM}{rc^2})$ (12)

从引力公式（12）可以看出，F 只是位置 r 的函数，因此也存在一个等效引力势 Φ，它应满足：$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{GM}{r^2}\exp(-\frac{2GM}{rc^2})$ (13)，对上式积分，并引入边界条件 r =∞ 时，Φ =0 于是得到：$\Phi=-\frac{c^2}{2}[1-\exp(-\frac{2GM}{rc^2})]$ (14)，将（13）代入到运动方程（11）中，则相对论引力场中的质点运动方程为：$m_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-m_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ (15)，对上式进行积分，利用公式(7)并注意边界条件：r =∞ 时，u_∞ = 0, Φ_∞ = 0, 最后得到：$m_0\frac{u^2}{2}+m_0\Phi=0$ (16). 方程(16) 就是考虑了相对论效应后的能量守恒方程，它与牛顿力学的能量守恒方程在形式上是相同的，二者的区别仅在于，这里用相对论的引力势代替了牛顿引力势. 我们知道，牛顿引力场是一个保守力场. 现在，由(16)我们不难得出，相对论的引力场也是一个保守力场. 在牛顿力学里，能量守恒方程的含义是，质点运动时其动能与势能之和等于常数，在相对论情况下则变成，质点运动的等效动能与等效势能之和等于常数.

总之，对于静态球对称的相对论引力场，我们可以证明其能量守恒方程与牛顿力学的方程在形式上完全相同. 因此，任意静态球对称星球的引力场是一个保守力场，这个结论无论是牛顿力学还是相对论均成立，于是定理 1 得证.

笔者认为：机械能守恒定律在狭义相对论中也是成立的，机械能守恒定律不但满足力学相对性原理也满足狭义相对论性原理.

5/14/2014