一个备用的教案

谭天荣

青岛大学 物理系 青岛 266071
ttr359@126.com

Abstract：按照我的意见，《自然辩证法》是一本没有定稿的书，其中的某些论点，对于一个没有自己重踏恩格斯的思路的读者是不可能理解的。这里我举一个例子，在该书的开头，恩格斯写道："力学，出发点的惯性，而惯性只是运动不灭的反面表现。""惯性"这一用语在这本书中只在这里惊鸿一瞥，以前不曾出现，以后也不再出现。这句话是什么意思，众说纷纭，迄今没有一个哪怕是字面上说得通的看法。爱因斯坦是诚然一个卓越的物理学家，但他肯定不知道恩格斯这里说的是什么意思。

[谭天荣. 一个备用的教案. Academia Arena, 2012;4(2):62-63] (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net. 9

Keywords：力学；惯性；物理学；数学；《自然辩证法》

我是一个物理教师，也教过几年高等数学。有一次当我讲完关于"导数"的定义时，一个学生问我一个课外的问题：为什么"负一"乘"负一"等于"正一"。当时已经下课了，我在自己家里为他给出如下回答：

我们开始学算术时，总是把一个算术式与某一"日常生活中的实例"联系起来，例如，把"一加一等于二"这个算术式与"一个桃子加上一个桃子得到两个桃子"这一实例联系起来。一个算术式有了这样的实例，我们就理解了，一旦没有这样的实例，这个算术式就成了"无法理解"的。

像这样，我们把分数"三分之二"理解为三个人分两个桃子时，每个人分得的份额；把"负数"理解为家庭收支中的"债务"，等等。但我们的日常生活领域太狭窄，远不能为所有的算术式提供实例，我们不理解为什么"'负一'乘'负一'等于'正一'"，正是因为我们一时找不到对应于这一算术式的实例。或许，有人生活经验极为丰富，能为这个算术式乃至其他更复杂的算术式找到实例，但只要他局限于"寻找对应的实例"这样的理解方式，他就早晚会遇到一个界限，在这个界限之外的算术式，就成了他所不理解的。

然而，如果放弃这种理解方式，就有可能越过这一界限，例如，"负一乘负一等于正一"这个算术式可以按照如下方式来理解：

第一，三加负一等于二，二加负一等于一；

第二，二乘一等于二；

第三，从第一步与第二步我们得到："三加负一"乘"二加负一"等于二；

第四，展开"三加负一"乘"二加负一"，得到四项之和，其中有三项不涉及负数与负数之积，从而是我们已经接受的算术式；而第四项则正是"负一"乘"负一"。借助于已知的运算规律，可将前面三项合并，得到"一"。于是我们得到："三加负一"乘"二加负一"等于"一"加上"负一乘负一"。

第五，从第三步与第四步我们得到："'一'加上'负一乘负一'等于二。"

第六，将"一"移项，从第五步得到"'负一乘负一'等于'正一'"。

在这六步中，我们一方面应用了已经接受的算术式，另一方面又应用了算术中的交换律、结合律、分配律以及移项等已知规律，这就表明，按照这些已知规律，我们可以从已经接受的算术式"推导出""负一乘负一等于正一"这一算术式。这样，我们就按照算术自身的规律理解了这一算术式。

一般地说，我们学习算术可以分成为三个阶段：第一阶段，从与日常生活的实例对比中来理解某些个别的算术式，同时从这些个别的算术式总结出一般的运算规律；第二阶段，按照第一阶段总结出运算规律，从一些较简单的算术式导出较复杂的算术式，不再要求这些较复杂的算术式与日常生活的实例相互对应。第三阶段，从最简单的算术式和最简单的运算规律开始，导出全部算术式，从头到尾摆脱与日常生活的实例相互对应这一环节。这个第三阶段所用的方法就是所谓"公理化"的方法，这种方法对于我们学习算术乃至学习数学的其他分支都是极为重要的。

上面就是我的回答。不久，这位学生又问我关

于复数的问题，他的提问和我的回答至今我记忆犹新。我原准备就这一问题给学生们上一节课，还为此准备了一个教案，下面是这个教案的要点：

关于复数的故事，可以从“数学怪人”卡丹的一道题说起，“如何把 10 分成两部分，使得其乘积为 40？”这道看来平淡无奇的算术题的求解把我们带进了怪异的复数王国。对于这一意外的结果，卡丹这样说：“算术是如此微妙地发展着，而它的尽头，却……是既精致而又无用的。”

在以后的发展中，复数运算不仅越来越精致，而且也越来越有用，但数学家们却继续拒绝承认复数是“数”。直到“数学王子”高斯和与他同时代的其他人把复数表成平面上的一点，并给出复数加法与乘法的几何意义，复数才最终登上了数学的大雅之堂。

对于我来说，接受复数是在接受了“域”的概念之后。“域”虽然是一个“高等代数”的概念，但只要学过“分数”，我们就可以这样理解它：“域”是一个“数的集合”，在这个集合中，可以定义加减乘除四则运算，而且其中的加法和乘法运算，满足交换律、结合律、交换律等运算规律。有了“域”的概念，“复数”就可（借助于实数）定义如下：

第一，每一个实数都是一个复数；

第二，“负一的平方根”是一个复数；

第三，全体复数构成一个“域”。

由此可见，掌握“域”的概念之后，对“复数”这一概念的引进可大大简化。

有了“域”的概念，我同样容易地接受了“非标准分析”中的“超实数”，因为“超实数”可（借助于实数）定义如下：

第一，每一个实数都是一个超实数；

第二，某一无穷小量（其绝对值大于零而小于一切正实数的量）是一个超实数；

第三，全体超实数构成一个“域”。

关于有理数、实数、复数和超实数的理论，统称为“数系”的理论。对于这一理论，“域”是一个关键的概念。

马克思在他的《数学手稿》中曾对“导数”有过一些议论，作为一个外行人在工作之余想一想数学问题，无论对错都是无可非议的。不幸的是，当“马克思主义”蜕变为一种宗教以后，他的数学手稿也被提升为数学的“最高成果”，这就引起了完全多余的麻烦。对于数学我所知甚微，不可能在这里评论马克思的《数学手稿》的学术价值的问题。但对于马克思在手稿中提出的一个论点我不妨说两句，马克思谴责数学家们忌讳把“零”作为一个分数的分母，说这是一种“形而上学的恐惧”，这一点我不敢苟同。如果允许零作为分母，除法就不再是一个“代数运算”，而“分数”就不再是一个“域”。这样，整个算术的大厦就成了一片废墟。

恩格斯曾说马克思是一个精湛的数学家，在我看来，这表明恩格斯对于数学也只是一个“半通”（这是他对自己的评价）。

在《自然辩证法》一书中，恩格斯一方面对数学提出许多深刻而又中肯的意见；另一方面也提出了某些错误的看法而不自知。但是，其中有一论点恩格斯自己也知道错了，那就是他说：“虚数的荒谬的，但有时候应用虚数也能得出正确的结论。”错在何处，恩格斯没有说。其实，恩格斯对虚数的这种看法，和 17、18 世纪大多数数学家对虚数的看法差不多，问题仅在于到了恩格斯所处的时代，数学家们已经认识到复数并不是荒谬的，而作为一个哲学家，恩格斯本应走在数学家们前面的……。

恩格斯对虚数的看法是一种落后于时代的看法，这一看法说明恩格斯也是一个人，而不是无所不知的神。至于马克思关于“零可以作为分数的分母”的意见，就不是落后不落后的问题，它是一个错误，而且是一个致命的错误。

不过话又说回来，对于数学，马克思充其量是一个业余爱好者，不论他有怎样的错误，都可以一笑置之，这件小事丝毫无损于这位伟大的思想家的声誉。至于“最高成果”之说，那就不能由马克思负责任了。

一个相关的问题是爱因斯坦对恩格斯的《自然辩证法》一书的评价，这个问题一向很敏感，而且不完全是一个学术问题。按照我的意见，《自然辩证法》是一本没有定稿的书，其中的某些论点，对于一个没有自己重踏恩格斯的思路的读者是不可能理解的。这里我举一个例子，在该书的开头，恩格斯写道：“力学，出发点的惯性，而惯性只是运动不灭的反面表现。”“惯性”这一用语在这本书中只在这里惊鸿一瞥，以前不曾出现，以后也不再出现。这句话是什么意思，众说纷纭，迄今没有一个哪怕是字面上说得通的看法。爱因斯坦是诚然一个卓越的物理学家，但他肯定不知道恩格斯这里说的是什么意思。如果一个人连恩格斯说的是什么都不知道，他能对《自然辩证法》提出中肯的意见吗？

这个教案还有一些细节，就不在这里叙述了。由于这个教案不在教学计划之内，我一直没有用。时至今日，看来我是再也用不上了。

2/22/2012