一种有趣的数学现象（上）

谭天荣

青岛大学 物理系 青岛 210100111

y-tx@163.com

内容提要：在张量形式下，三维空间的静磁学方程与四维时空的电磁学方程是一样的。根据这种相似性，从静电学方程可得到另一组四维时空的场论方程，从而导致如下猜测：第一，除了引力场论及电磁场论以外，自然界还有第三种场论。第二，这种场论描述核子之间的相互作用。[Academia Arena, 2010;2(9):14-20] (ISSN 1553-992X).

关键词：静磁学；电磁学；张量方程；引力场论；静电学；库仑定律

1. 引言

如果把静磁学的基本方程写成欧几里德运动群（三维空间）的张量形式，再将这些方程理解为洛伦兹群（四维时空）的张量方程，就得到电磁学的基本方程。这种有趣的数学现象，或许有助于我们从另一角度透视物理学的数学结构。

2. 静磁学方程的张量形式

在真空中，静磁学的磁通连续性定律表成

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

安培环路定律表成

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}。 \tag{2}$$

从(1)式可知存在矢势$\mathbf{A}$，使得$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$。因为在静磁学中，电流是无源的，即$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$，对应地，我们采用库伦规范$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$，于是(2)式给出静磁学的泊松方程：

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \tag{3}$$

其中

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}。$$

另一方面，静磁学的洛仑兹力方程表成

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}。 \tag{4}$$

上式与(2)式给出

$$-\mu_0 \mathbf{f} = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})。$$

应用(1)式，矢量分析给出

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2}\nabla B^2 - \nabla \cdot (\mathbf{BB})。$$

引进单位并矢 **I**，有

$$\frac{1}{2}\nabla B^2 = \nabla \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{I}B^2)。$$

上面诸式给出

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\mathbf{BB} - \frac{1}{2}\mathbf{I}B^2) = \mathbf{f}。 \tag{5}$$

我们称这一方程为“静磁应力方程”，它表明，任意区域内的电流所受的磁力，可以化归为该区域表面的“静磁应力”的作用，这是“电磁作用是一种接触作用”的又一个论据。

现在，我们把这一组静磁学方程表成三维空间的张量方程的形式。

如果取“笛卡尔坐标”，则三维空间的“基矢”与“坐标”遵循相同的变换规律，因此“共变指标”与“逆变指标”遵循相同的变换规律。但为了便于过渡到四维时空，还是一开始就区分这两种指标。按照惯例，我们把基矢写成 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$，对应地，位置坐标写成 x^1、x^2 和 x^3，矢量势的坐标写成 A^1、A^2 和 A^3，电流矢量的坐标写成 J^1、J^2 和 J^3。另一方面，引进微分算符∇的共变坐标

$$\nabla_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad \nabla_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad \nabla_3 \equiv \frac{\partial}{\partial x^3},$$

则方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 与 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 分别表成

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \qquad \nabla_\mu A^\mu = 0。$$

磁场强度 **B** 是一个轴矢量，在张量代数中对应一个反对称张量，用 $F^{\mu\nu}$表示这个张量，其坐标

$$F^{23} = -F^{32} = B_x; \qquad F^{31} = -F^{13} = B_y; \qquad F^{12} = -F^{21} = B_z,$$

则(2)式表成

$$\nabla_\mu F^{\lambda\mu} = \mu_0 J^\lambda。 \tag{6}$$

再引进克罗内科尔符号

$$\delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\nu = \begin{cases} 0，当 \mu \neq \nu; \\ 1，当 \mu = \nu, \end{cases}$$

则按照定义，共变度规张量

$$g_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}。$$

逆变度规张量的坐标从方程组$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda{}_\nu$解出，其解为$g^{\lambda\mu} = \delta^{\lambda\mu}$。由此得到微分算符的逆变坐标

$$\nabla^\lambda = g^{\lambda\mu}\nabla_\mu。$$

这样，(1)式表成：

$$\nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \nabla^\mu F^{\nu\lambda} + \nabla^\nu F^{\lambda\mu} = 0。 \tag{7}$$

这是一个方程组，共有 27 个方程，但实质上只有一个。

此外，(4)式表成

$$f^\lambda = J_\mu F^{\lambda\mu}。 \tag{8}$$

而$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$则表成

$$F^{\mu\nu} = \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu。 \tag{9}$$

将算符∇_μ作用于(9)式两端，考虑到(6)式和$\nabla_\mu A^\mu = 0$，得到(3)式的张量形式：

$$\Delta A^\lambda = -\mu_0 J^\lambda。 \tag{10}$$

应用(6)式和(7)式，再把把安培环路定律表成$-\mu_0 J_\nu = \nabla^\mu F_{\mu\nu}$，得到(5)式的张量形式：

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla^{\mu}(F^{\lambda\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\delta^{\lambda}{}_{\mu}F^{\rho\nu}F_{\rho\nu}) = -f^{\lambda}, \tag{11}$$

上面我们推导这组静磁学的张量方程时，约定其中的指标都遍历 1、2 和 3。下一节我们将证明，如果在这些张量中，加上第四个指标，即把诸张量理解为四维时空的张量，它们就是电磁学的基本方程。

3. 电磁学方程的张量形式

与三维空间相比，四维时空除了位置坐标x^1、x^2 和x^3 以外，还有一个时间坐标$x^0 = ct$。对应地，基矢除了$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ 和$\mathbf{e}_3$ 以外，还有$\mathbf{e}_0$，它满足

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = -1。$$

从而共变度规张量$g_{\mu\nu}$ 还是对角线张量，取值为

$$g_{00} = -1, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,$$

其余坐标为零。

克罗内克尔符号的含义不变，只是其指标遍历 0、1、2、3。

逆变度规张量还是由方程组$g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}{}_{\nu}$定义，从而取值为

$$g^{00} = -1, \qquad g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$$

而其余坐标为零。

算符∇的四个共变坐标分别为

$$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \nabla_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}。$$

下面我们在洛仑兹群的含义下，重新解释静磁学的诸张量方程。

第一，对于洛仑兹群，方程 $\nabla_{\mu}J^{\mu} = 0$ 写成 $\frac{1}{c}\frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$。取$J^0 = c\rho$，就得到连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0。$$

第二，在(6)式中，取$\lambda = 0$，有 $\nabla_1F^{01} + \nabla_2F^{02} + \nabla_3F^{03} = \mu_0J^0$。只要对反对称张量$F^{\lambda\mu}$取新坐标

$$F^{01} = -F^{10} = \frac{E_x}{c}; \qquad F^{02} = -F^{20} = \frac{E_y}{c}; \qquad F^{03} = -F^{30} = \frac{E_z}{c},$$

再注意到 $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$，就得到麦克斯韦方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}。$$

取$\lambda = 1$，(6)式给出

$$\nabla_0F^{10} + \nabla_2F^{12} + \nabla_3F^{13} = \mu_0J^1,$$

从而得到麦克斯韦方程

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$$

的一个投影。

第三，注意到算符∇的逆变坐标为

$$\nabla^1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \nabla^3 = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla^0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}。$$

对应于(7)式的是另一组麦克斯韦方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0。$$

第四，与电流矢量类似，矢势A也增加了一个坐标$A^0 = c\phi$，于是，$\nabla_\mu A^\mu = 0$表示洛仑兹规范

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0。$$

而(9)式表示两个方程

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A};\qquad \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - c^2\nabla\phi。$$

第五，在(8)式中取$\lambda = 0$，有

$$f^0 = J_1F^{01} + J_2F^{02} + J_3F^{03} = \frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{E};$$

引进电功率$p = cf^0$，则有

$$p = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}。$$

取$\lambda = 1$，有

$$f^1 = J_0F^{10} + J_2F^{12} + J_3F^{13} = (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B})_x。$$

从而给出洛仑兹力方程。

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}。$$

第六，仍然规定$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$，再令$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$，则对于洛仑兹群，(10)式变成$\Box A^\lambda = -\mu_0 J^\lambda$，它给出如下两个波动方程

$$\Box\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0};\qquad \Box\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}。$$

最后，在(11)式中取$\lambda = 0$，有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = -p。\tag{12}$$

其中

$$u = \frac{1}{2\mu_0}B^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}E^2;\qquad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B});$$

取$\lambda = 1$，该方程是

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{\Phi} = -\mathbf{f}。\tag{13}$$

的一个分量，其中

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B});\qquad \mathbf{\Phi} = -\varepsilon_0\mathbf{EE} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{BB} + \mathbf{I}(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2)。$$

这是电磁场的能量动量守恒定律。

于是我们看到，电磁学与静磁学由同一组张量方程来描写，只不过静磁学满足的是三维空间的张量，电磁学满足的却是四维时空的张量，下面我们称这种有趣的数学现象为“动静相似现象”。

4. 一组新的场方程

我们看到，把静磁学的基本方程写成三维张量的形式，再理解为四维时空的张量，就得到电磁学的相应的方程。那么，如果把静电学的基本方程写成三维张量的形式，再理解为四维时空的张量，会得到什么样的结果呢？

静电学的库仑定律（真空中的）一方面给出高斯方程

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

另一方面给出静电力方程

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E}。$$

此外，静电场的无旋性方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

表明可以引进静电势ϕ，使得

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi。$$

于是高斯方程给出静电学的泊松方程

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}。$$

此外，高斯方程与静电力方程还给出

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E}。$$

应用$\nabla \times \mathbf{E} = 0$可得到

$$(\nabla\mathbf{E})\cdot\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot\nabla\mathbf{E}。$$

从而有

$$\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot(\mathbf{EE} - \frac{1}{2}\mathbf{I}E^2)。$$

上面诸式给出“静电应力方程”

$$\varepsilon_0\nabla\cdot(\mathbf{EE} - \frac{1}{2}\mathbf{I}E^2) = \mathbf{f}。$$

上面的这组方程也可以表成欧氏运动群的张量方程的形式。用 E^1、E^2 和 E^3 分别表示静电场强度的直角坐标，则高斯方程表成

$$\nabla_\mu E^\mu = \frac{\rho}{\varepsilon_0};$$

而静电场的无旋性方程则表成

$$\nabla^\mu E^\nu - \nabla^\nu E^\mu = 0。$$

静电场与静电势的关系表成

$$E^\mu = -\nabla^\mu\phi。$$

静电学的泊松方程

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

本身就是一个张量方程。

另一方面，静电力方程的张量形式可表成

$$f^\lambda = \rho E^\lambda。$$

考虑到高斯方程，有

$$f^\lambda = \varepsilon_0 E^\lambda\nabla_\mu E^\mu。$$

应用静电场的无旋性方程，得到

$$\varepsilon_0\nabla_\mu(E^\lambda E^\mu - \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}E_\nu E^\nu) = f^\lambda, \quad (14)$$

如果把上述静电学的张量方程理解为四维时空的张量方程，我们将得到一组新的场方程。

电磁场张量 $F^{\mu\nu}$是反对称的二阶张量，在这种意义下，电磁场是一个“二阶场”。如果把 E^μ理解为洛仑兹群的张量，则它是一个一阶张量，表示某种 “一阶场”的强度。下面，我们称这种未知的“场”为“X 场”。相应地，该场的“力”、“势”和“荷”分别简称为“X 力”、“X 势”和“X 荷”。

E^μ 作为X场的强度是四维时空中的一个“矢量”，它有四个坐标，分别为E^0，E^1，E^2和E^3。为了不与电磁场中的电场混淆，我们令

$$E^0 = c\xi;\quad E^1 = \eta_x,\quad E^2 = \eta_y,\quad E^3 = \eta_z。$$

于是“X 场”的强度由三维空间的一个数量场ξ和一个矢量场$\boldsymbol{\eta}$来描述。

对于电磁场，电荷密度与电流密度组成“荷密度”的一阶张量，而 X 荷的密度却是一个标量，我们们用ω表示它。

自然界中有没有这样的“X 场”和“X 荷”还是一个问题，但从“动静相似现象”出发，我们可以探讨如下问题：如果有“X 场”和“X 荷”，它们应该满足什么样的方程？

首先，这个未知的场论将有一个新的常量α，使得高斯定理表成洛仑兹群的张量方程 $\nabla_\mu E^\mu = \alpha\omega$，在三维空间，该方程表成

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{\eta} = \alpha\omega。$$

相应地，$\nabla^\mu E^\nu - \nabla^\nu E^\mu = 0$ 表成

$$\nabla\times\boldsymbol{\eta} = 0;\qquad \nabla\xi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial t} = 0。$$

一般地说，在把上面的三维张量方程理解为四维时空的张量方程的同时，我们把其中的常量ε_0改写成 $1/\alpha$。

例如，静电学的泊松方程方程 $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$转化为一个波动方程，其波函数是一个标量场，还是将它写作φ，则有

$$\Box\phi = -\alpha\omega。$$

张量方程$f^\mu = \rho E^\mu$ 改写成$f^\mu = \omega E^\mu$，它给出

$$\mathbf{f} = \omega\boldsymbol{\eta};\qquad p = c^2\omega\xi。$$

令

$$u = \frac{1}{2\alpha}(\eta^2 + c^2\xi^2),\qquad S = \frac{1}{\alpha}c^2\xi\boldsymbol{\eta};$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\alpha}\xi\boldsymbol{\eta},\qquad \Phi = \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2\alpha}\mathbf{I}(\eta^2 - c^2\xi^2)。$$

则(14)式给出(12)式和(13)式，它们是 X 场的能量动量守恒定律。

5. 结束语

上面是一组与电磁场论方程一样完备的场方程，它有没有现实的原型呢？它是不是一种堪与引力场论及电磁场论并列于自然界的第三种场论呢？

在爱因斯坦之后人们发现，除了电磁相互作用与引力相互作用之外，自然界还有另外两种相互作用：强相互作用与弱相互作用。再后来，弱电统一理论得到公认，这是否意味着麦克斯韦-洛仑兹方程组与弱相互作用理论是从不同的角度表现同一种场论呢？果真如此，我们能否也可以认为 X 场的场方程组与强相互作用理论也是从不同的角度表现同一种场论呢？

An Interesting mathematics Phenomenon（A）

TAN Tianrong

Department of Physics, Qingdao University, Shandong 210100111, P.R.China

y-tx@163.com

Abstract: It is pointed that in the form of tensor equations, the three-dimensional equations describing static magnetism are all the same to the four-dimensional equations describing electromagnetism. Starting from such a similarity, a set of new basic four-dimensional equations of field theory can be obtained from static electricity equations. As a result, it is surmised that: Firstly, there exists the third field theory comparing favorably with the field theory of electromagnetism and that of gravitation. Secondly, the very field theory can describe the interaction between nucleons. [Academia Arena, 2010;2(9):14-20] (ISSN 1553-992X).

Key words: static magnetism; electromagnetism; tensor equations; gravitation field theory; static electricity; Coulomb law

7/1/2010