数学问题

李学生

山东大学副教授，理论物理教师， 中国管理科学院学术委员会特约研究员、北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员
xiandaiwulixue@21cn.com

摘要：1. 本文指明数学归纳法的实质在于递推，将其从正整数集逐步推广至整数集、实数集、有理数集、复数集等集合，从普通加法运算推广至一般抽象运算，给出了一般集合上的数学归纳法，为数学命题的证明开辟了一条新的道路，同时举例说明了其应用。2. 本文从数集的扩展原则与扩展的必要性出发，阐明了哈密尔顿的四元数不能作为复数集的拓广，从而将向量乘法与普通乘法区别开来。3. 本文对环的定义作了几种扩充，的出了一些新的概念，加深了对环的认识。4. 本文从数学美的角度把不定积分定义为一元函数的负一阶导数，将 Jacobi 行列式定义为多元函数组的导数，并指明了雅可比行列式的几何意义，最后举例说明了其应用。 [Academia Arena, 2009;1(3):70-82]. ISSN 1553-992X.

关键词：数学归纳法、递推、整数集、实数集、抽象运算、四元数、异议、数集的扩展原则、向量乘法、普通乘法、导数、扩充、数学美、Jacobi 行列式、不定积分。

1. 数学归纳法的拓广

数学归纳法通常是证明与正整数集有关命题的一种重要的论证方法，许多数学命题利用其它数学方法很难证明或者根本无法证明，但利用数学归纳法很容易解决。数学归纳法的理论根据是正整数集的序数理论，为了证明命题的需要而演变成了多种形式，同时将数学归纳法从正整数集推广至所有良序集。

定义：设 S 是一个集合，≤是 S 中一个二元关系，满足 ① 对任何 $x\in S$ 有 $x\leq x$; ② 对任何 x、$y\in S$ 有 $x\leq y$ 且 $y\leq x$ 可得 $x=y$; ③对任何 x、y、$z\in S$ 有 $x\leq y$ 且 $y\leq z$ 可得 $x\leq z$，④对任何 x、$y\in S$ 均有 $x\leq y$ 或 $y\leq x$; ⑤若 S 的任何非空子集有最小元。则称 S 是良序集。

超限归纳法原理：设（S，≤ ）是一个良序集，P（x）是与元素 $x\in S$ 有关的一个命题，①如果对于 S 中的最小元 a_0，P（a_0）成立；②假定对于任何 $x<a$, P（x）成立，可证明 P(a) 也成立。则 P(x)对任何 $x\in S$ 都成立。

根据上面的理论，集合 $M=\{n_0,n_0+1,n_0+2,\cdots\cdots\}$，$n_0\in Z$, 对于普通数的大小是良序的，因此类似于正整数集也可以列出数学归纳法的各种形式．整数集与实数集对于普通数的大小不是良序的，但可对其重新规定序使其成为良序集，不过有时给证明命题带来很大困难．倘若我们从另一个角度审视数学归纳法会发现数学归纳法的理论根据是正整数集的序数理论，其实质在于递推．

（一）整数集上的数学归纳法原理

定义：任何一个非空集合 Z 的元素叫做整数，如果在这个集合里的所有元素之间有两种基本关系－＂前继＂与＂后继＂满足下面的公理：① 对任何一个数 a，存在着且仅存在者一个后继数 a'与前继数'a；②任何数只能是一个数的后继数与另一个数的前继数；③ 存在 $a\in N$，且 $a\in Z$；④（归纳公理）设 Z 有一个子集 M，满足条件

Ⅰ $Z_0\in M$,且 $Z_0\in Z$;

Ⅱ 若 $a\in M$，有'$a\in M$，a' $\in M$.则 M=Z.

1、 第一数学归纳法原理：设有一个关于整数集 Z 的命题 p(Z),①若存在 $Z_0\in Z$，p（Z_0）成立；②若 p(k)成立，则 p(k+1)与 p(k-1)均成立。那么对于任意整数 Z，p(Z)都成立.

证明：设 M 是使命题 p（Z）成立的整数集合，于是：①因为存在 $Z_0\in Z$，p（Z_0）成立，故得 $Z_0\in M$：②因为假定 p(k)成立的条件下，能推出 p(k+1)与 p(k-1)成立，即由 $k\in M$ 能推出'$k\in$

M,k'∈M.因此集合 M 具有整数定义中归纳公理的条件①②,由归纳公理得 M=Z。 故 p(Z)对于任意整数 Z 都成立.

2、 第二数学归纳法原理：设有一个关于整数 Z 命题 p(Z)。①若存在 Z_0∈Z，$p(Z_0)$成立；②设 $Z_0 \leqslant x < k_1$,若 p(x)成立，则 $p(k_1)$成立；③设 $k_2 < x \leqslant Z_0$,若 p(x)成立，则 $p(k_2)$成立。那么 p(Z)对于任意整数 Z 均成立。注：k_1 与 k_2 为整数。

证明：假设 p（Z）不是对于所有整数均成立，根据整数集的序数理论，可以找到一个整数 Z_1，不妨设 $Z_1 \geqslant k_1$(当 $Z_1 \leqslant k_1$ 时，证明类似)，使 $p(Z_1)$不成立，而 $p(Z_1-1)$成立。根据归纳假设--由 p(x)，$k_1 \leqslant x < Z_1-1$ 成立，得 $p(Z_1)$成立.这与前面的假设相矛盾。故 p(Z)对于任意整数均成立。

数学归纳法可以应用于整数集的实质在于整数集中相邻两数的差为定值 1，那么它也可以应用于其它公差为定值或公差为统一公式的数集，例如集合 M=｛n_0,n_0-1,n_0-2,…｝，n_0∈Z。奇数集或偶数集也可以建立其序数理论，方法及证明类似于整数集，只不过将 k±1 变为 k±2 即可。

综上所述，数学归纳法可以应用于整数集及其某些子集，而数论主要是研究整数性质的，所以数学归纳法的拓广可能有助于数论的研究，例如可以把某些关于正整数的命题推广至整数集等。下面举例说明数学归纳法在整数集中的应用。

例 1 求证：对于任意整数 x，$f(x)= 0.2x^5+1/3x^3+ 7/15x$ 是一个整数。

证明：①当 x=0 时，f(x)=0 命题成立。②假定当 x=k 时命题成立，即 $f(k)=0.2k^5+1/3\ k^3+7/15k$ 为整数,

则当 x=k±1 时 $f(k\pm 1)=0.2\ (k\pm 1)^5+1/3\ (k\pm 1)^3+7/15(k\pm 1)=(k^5/5+k^3/3+7k/15)\pm k^4+2k^3+3k^2+4k\pm 1$∈Z。

这说明当 x=k±1 时命题成立。由①②可知，对于任意整数 x，原命题均成立。

下面笔者举出几例，作为引玉之砖。

① 当 n 为任何非负偶数时，x^n-1 都可以被 x+1 整除；当 n 为任何非负偶数时，x^n+1 都可以被 x+1 整除；

② n^3+5n 能被 6 整除（n∈Z）。

③ 若 x∈Z,$x^3+2x+3y=0$,则 y∈Z.

④ 已知：$x+x^{-1}=2\cos\theta$ 。求证：$x^n+x^{-n}=2\cos n\theta$,n∈Z.

㈡实数集上的数学归纳法

在运用数学归纳法证明有关整数集上的命题时，初始值取一个数，若将初始值变为一个区间，则可证明实数集上的某些命题。下面列出实数集上的第一数学归纳法原理，其它形式及证明从略。

第一数学归纳法原理：设 p(R)是一个关于实数集的命题。若存在 R_1，R_2∈R，在［R_1，R_2］上命题 p(R)成立；若假设 p(k)成立，能推出 p(k±L)成立，其中 $0 < L \leqslant R_2-R_1$,则 p(R)对于所有实数均成立。

［注］ 若将闭区间改为开区间或半开半闭区间，$0 < L < R_2-R_1$.

例 2 已知：a∈R*，求证：$f(a)=a^8-a^5+a^2-a+1>0$

证明：①若 a∈[0，1]，则 $a^2 \geqslant a^5$,$f(a)==(1-a)+(a^2-a^5)+a^8>0$，命题成立。 ②设 k∈R*，若 $f(k)=k^8-k^5+k^2-k+1 > 0$，则 $f(k+1)=(k+1)^8-(k+1)^5+(k+1)^2-(k+1)+1=(k^8-k^5+k^2-k+1)+8k^7+28k^6+56k^5+65k^4+56k^3+18k^2+5k>0$

∴对于任意 a∈R*，f(a)＞0

例 3 运用数学归纳法证明：$2^m>2m+1$,（m∈R,m≥3）。

证明：①当 m∈[3，3.5）时，左边=$2^m \geqslant 8$，右边=2m+1＜8，命题成立。

②假设当 m=k 是命题成立，即 $2^k>2k+1$,那么当 m=k+0.5 时，$2^{k+0.5}>$（2k+1）$2^{0.5}$=（2k+1）+（$2^{0.5}$-1）（2k+1）。

因为（2k+1）＞3，所以（$2^{0.5}$-1）（2k+1）＞1，即 $2^{k+0.5}>$2（k+0.5）+1。命题成立。由①②可知，$2^m>2m+1$,（m∈R,m≥3）。

前面我们所讨论的数集都是对加法或减法构成递推数集，实际上任何一个集合（不一定是数集）通过某种运算，能使该集合的各个元素之间具有递推性，原则上也可以利用数学归纳法原理证明,例如双等差数集与集合 $M=\{2^0,2^1,2^2,\cdots,2^n,\cdots\}$。因此数论中有些猜想至今没有证明，或许可以构造一种新型运算，使集合中的元素具有递推性，从而得到解决。通过推广数学归纳法还可将某些集合上的命题拓广.下面列出一般集合上的第一数学归纳法原理，其它形式略。

第一数学归纳法原理：设命题 P 是关于集合 M 的命题。通过构造某种运算*，使得集合 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\cdots\}$中的元素具有如下关系：$a_1*q=a_2,a_2*q=a_3,\cdots,a_{n-1}*q=a_n,\cdots\cdots$.若 $P(a_1)$成立,在假定 $P(a_k)$成立的条件下,可以推出成立.那么命题 P 对于集合 M 中的任何元素都成立。

注:1、 运算*可以是代数运算,也可以是超越运算,甚至于可以是一般的抽象运算.

2 、元素可以属于集合 M,也可以不属于 M,譬如正整数集中 $1\in N^*$,奇数集中 2 不属于奇数集.

3、当上述方法还是无法证明时 ,可以考虑数学归纳法的其它形式,也可以分成几个集合,定义不同运算分别进行归纳,也可以各种形式混合使用.另外也可以去掉有限个元素后,使其具有递推性,但去掉的元素应单独证明.

4 、有些集合需要多步证明,例如有理数集可分别归纳分子与分母,复数集可分别归纳实部与虚部，或者分别归纳模与辐角.下面列出有理数集上第一数学归纳法原理,其它形式及证明从略.

第一数学归纳法原理:设有一个关于有理数集 Q 的命题 P(Q),①若存在 $Z_0\in Z$,命题 $P(Z_0)$成立;②若 P(k)成立$(k\in Z)$,则 P(k')与 P('k)均成立;③任取 $m\in Z$,若 P(m/n)成立$(n\in N)$,则 p(m/(n+1))成立,那么对于任意有理数 Q,命题 P(Q)均成立.

2. 不变子群与理想关系初探

理想在环论中的地位与不变子群在群论中的地位相似，但理想与不变子群有着本质的差异，为此先列出这两个定义：

不变子群的定义：一个群 G 的一个子群 N 叫做一个不变子群，假如对于 G 的每一个元 a 来说，都有 Na=aN。

理想的定义：环 R 的一个非空子集合 ц 叫做一个理想子环，简称理想，假如（1）由 a,b∈ц 得 a-b∈ц;(2)由 a∈ц,r∈ц 得 ar,ra∈ц.

通过比较便可以清晰地看到它们的区别，在不变子群中要求:（1）∀ a∈G，Na=aN，而在理想中则要求∀ r∈R，∀ a∈ц 得 ar,ra∈ц。显然在不变子群中∀a∈G，∀r∈N，ar,ra 不一定属于 N，譬如 $G=S_3$，N={(1)，(123)，(132)} 是一个不变子群，N（12）={(12)，(123)，(13)}，（12）N={(12)，(13)，(23)}，N（12）=（12）N，但（12)、(13)、(23）均不属于 N。同理，当环 R 为非交换环，且环 R 有真理想时，也推不出 {ra}={ar}，∀r∈R，a∈ц。鉴于此，笔者建议再定义理想子群与不变子环，从而进一步认识不变子群与理想的区别。

不变子环的定义：环 R 的一个非空子集 N 叫做一个不变子环，或正规子环，假如（1）由 a,b∈N 得 a-b∈N;(2)由 a∈N,b∈N 得 ab∈N;(3) ∀ r∈R,rN=Nr.

理想子群的定义：一个群 G 的一个子群 N 叫做一个理想子群，假如∀ r∈G，∀ a∈N 得 ar,ra∈N。

3. 对于四元数的异议

按照现代数学的观点，数集包括狭义数集与广义数集两大类，狭义数集包括复数与超复数，广义数集包括向量、矩阵等集合，其中超复数起源于四元数，在 1828——1843 年，伟大的数学物理学家哈密尔顿为了物理学研究空间的需要，建立了一种对乘法运算不可交换的数集——四元数（又称超复数）,其一般形式为 ai+bj+ck+d,其中 a、b、c、d 为实数,i、j、k 为虚单位,$i^2=j^2=k^2=-1,ij=k,jk=i,ki=j,ji=-k,kj=-i,ik=-j$.其乘法规则类似于多项式乘法，但不满足交换律，设 $z_1=a_1i+b_1j+c_1k+d_1$，$z_2=a_2i+b_2j+c_2k+d_2$,则 $z_1z_2=-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2)+(b_1c_2+a_1d_2+a_2d_1-b_2c_1)i+(c_1a_1$

$-c_2a_1+b_1d_2+b_2d_1)j+(a_1b_2-a_2b_1+c_1d_2+d_1c_2)k$。对于四元数 ai+bj+ck+d 而言,当 b=c=0 时,四元数便成为复数；当 d=0 时，ai+bj+ck 代表三维向量， a、b、c 分别为其在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，（$a_1i+b_1j+c_1k$）$(a_2i+b_2j+c_2k)=-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+(b_1c_2-b_2c_1)i+(c_1a_1-c_2a_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$。后来，人们对其分成两部分，$(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)$为数量积，$(b_1c_2-b_2c_1)i+(c_1a_1-c_2a_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$ 为向量积，并分别在物理学中找到了其应用；为了物理学研究空间的需要将其推广为 n 维，并且不满足乘法结合律.。笔者发现把四元数作为复数集的拓广不满足数集的扩展原则与扩展的必要性。

㈠把四元数作为复数集的拓广不满足数集扩展的必要性

数集的每一次扩展，总是由于原来的数集与解决具体问题的矛盾而引起的，这些问题有的是首先从实际中提出 的，有些则是从数学本身首先提出的。为了使除法、减法运算封闭，从正整数集先后扩展到正有理数集合、有理数集合；为了表示无限不循环小数，引进了无理数，从有理数集合扩展到实数集； 为了使开方运算封闭，引进了虚数，从实数集扩展到复数集。在复数集 中，加、减、乘、除、乘方、开方等所有代数运算都已封闭，因此复数集是一个完美的数集，从数学本身来讲没有扩展的必要。退一步讲，假设四元数是复数集的拓广，那么开方运算失去意义，例如∵$i^2=j^2=k^2=-1$，∴－1 的平方根至少有 6 个——±i、±j、±k,其实一个四元数的 n 次方根有无数个解，这样将使开方运算 变为无定解运算。

㈡把四元数作为复数集的拓广不满足数集的扩展原则

①根据数集的扩展原数集作为新数集的特例，原有的运算法则依然成立。

当数集拓广至复数集后，人们迅速发现其在物理学中的应用——可以表示平面向量及其加减运算。但是复数的乘法与向量的乘法有着本质的区别，复数集对于乘法封闭且满足交换律，平面内向量的向量积是一个空间向量，数量积是一个标量。因此为了研究物理学中向量乘法而拓广复数集 是没有必要的,表示向量乘法与普通乘法的符号亦应区别开来,不必定义 $i^2=j^2=k^2=-1$.。向量运算不同于代数运算，没有必要将其纳入代数运算。若将三维向量表示为 a+bi+cj,数量积与向量积分别用“.”与“×”表示，$(a_1+b_1i+c_1j).(a_2+b_2i+c_2j)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$,$(a_1+b_1i+c_1j)\times(a_2+b_2i+c_2j)=(b_1c_2-b_2c_1)+(c_1a_2-c_2a_1)i+(a_1b_2-a_2b_1)j$,从而把向量乘法与普通乘法区别开来，又能作为复数集的拓广.其实这样做对表示向量乘法非常妥当，但它会使普通乘法出现矛盾，复数集对于普通乘法已经封闭，乘积中出现的 ij、ji 无论怎样定义都会出现矛盾，而且与普通乘法的符号不加区别会造成混乱。

② 在向量 ai+bj+ck 中 i、j、k 的意义与复数 a+bi 中的 i 意义不同。

在三维向量 ai+bj+ck 中 i、j、k 是为了区分向量在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量而作的标记，可以规定 $i^2=j^2=k^2$ 为任何实数,但在复数 a+bi 中的 i 有着特殊的含义:$i^2=-1$。在四元数 ai+bj+ck+d 中，当 d=0 时表示三维向量，a、b、c 分别代表在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，因此当 c=0 时，二维向量应为 ai+bj，a、b 分别代表在 x 轴、y 轴上的分量，但单位不一致 ，前者为 i、j,后者为 1、i,而 $i^2=j^2=-1\neq1$,因此这本身就具有一种不协调性。

综上所述，复数的乘法与向量的乘法有着本质的区别，哈密尔顿的四元数不能作为复数集的拓广，只不过他找到了向量的乘法法则。为了满足数集的扩展原则，笔者建议取消四元数，直接定义向量乘法。为了与复数乘法相区别，定义 i*i=j*j=k*k=1,这样可以避免运算结果中出现负号，其它的规则不变。设向量 $Z_1=a_1i+b_1j+c_1k$, $Z_2=a_2i+b_2j+c_2k$,$Z_1*Z_2=(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+(b_1c_2-b_2c_1)i+(c_1a_2-c_2a_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$,其中前者 $(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)$表示数量积，后者$(b_1c_2-b_2c_1)i+(c_1a_2-c_2a_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$ 表示向量积，不满足交换律。这种运算可以推广至 n 维，推广后不满足结合律。一句话，狭义数集只包含复数集。数学之所以完美是因为数学有一个完备的复数系统；复数系统之所以完备是因为它的元素数不仅仅是一个记号，而且源于人类对自然界

的抽象，带有宇宙的最基本信息。可见，数学美不是人类构造出来的，而是完美宇宙的真实映象。寻找宇宙的最基本信息是重要的，因为它有助于我们发现表达“适用于一切事物的理论”的数学形式，反过来，我们也可以从宇宙的最基本信息出发去思考宇宙的造化。

4. 环的定义的扩充

环是具有两种代数运算的集合，这两种运算满足一定的关系：对于一种运算构成加群，对另一种运算构成半群，两种运算之间满足分配律。但现实世界与科学研究中会出现这样的集合：具有两种代数运算，但是两种运算并不完全满足上述关系，为此必须对环的定义进一步拓广。下面给出几个定义，至于这些概念的应用及其性质的探讨，本文从略。

定义 1：一个集合 R 叫做一个半环，假如①R 对于一个叫做加法的代数运算来说是封闭的，并且满足结合律；②R 对于另一个叫做乘法的代数运算来说是封闭的，并且满足结合律；③两个分配律都成立——a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca，不管 b、a、c 是 R 的哪三个元。

注：若两种代数运算均满足交换律，称为加半环；若乘法满足交换律，称为乘法加半环。

定义 2：一个集合 R 叫做一个亏环，假如①R 对于一个叫做加法的代数运算来说构成一个群；②R 对于另一个叫做乘法的代数运算来说是封闭的，并且满足结合律；③两个分配律都成立——a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca，不管 b、a、c 是 R 的哪三个元。

定义 3：一个集合 R 叫做一个加环，①假如 R 是一个加群，即 R 对于一个叫做加法的代数运算构成一个交换群；②R 对于另一个叫做乘法的代数运算来说是封闭的，并且满足结合律和交换律；③两个分配律成立之一 ——a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca，不管 b、a、c 是 R 的哪三个元。

定义 4：一个集合 R 叫做一个盈环，①假如 R 是一个加群，即 R 对于一个叫做加法的代数运算构成一个交换群；②R 对于另一个叫做乘法的代数运算构成一个群；③两个分配律都成立——a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca，不管 b、a、c 是 R 的哪三个元。

定义 5：一个集合 R 叫做一个自然环，假如①R 对于一个叫做加法的代数运算构成一个群；②R 对于一个叫做乘法的代数运算构成一个群；③两个分配律都成立——a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca，不管 b、a、c 是 R 的哪三个元。

定义 6：一个集合 R 叫做一个加盈环，①假如 R 对于一个叫做加法的代数运算构成一个加群；②R 对于另一个叫做乘法的代数运算构成一个加群；③两个分配律成立之一 ——a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca，不管 b、a、c 是 R 的哪三个元。

定义 7：一个集合 R 叫做一个亏加环，①假如 R 对于一个叫做加法的代数运算构成一个群；②R 对于另一个叫做乘法的代数运算封闭，并且满足交换律与结合律；③两个分配律成立之一 ——a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca，不管 b、a、c 是 R 的哪三个元。

上面仅列出几种形式，至于其它形式，本文从略。

5. 集合中元素个数的再认识

经典的集合论认为元素的个数只能为自然数，但是有些理解比较困难，例如Φ-A+A=Φ+A=A，若按照结合律则得到Φ-A+A=Φ+（-A+A）=Φ，所以结合律不适用于集合的运算；另外模糊集合论中的元素不具有确定性。鉴于此，笔者建议对集合中元素的个数进行重新认识，元素的个数 应该定义在实数集合上，譬如-A 表示集合中尚缺 A 的元素个数个元素，即个数为负数，模糊集合论中元素的个数为分数或无理数。因此公式Φ-A=Φ可改为Φ-A=-A，A∪（-A）=Φ，集合的运算与数的运算便统一起来。

6. 最小公倍元

最大公因子是整环中的一个重要概念，它对研究唯一分解环有重要意义，它是来源于数论中的一个重要概念。最小公倍数也是数论中的一个重要概念，我们也把它引入整环中。

定义：在整环 R 中，元 C 叫做元 $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots a_n$ 的公倍元，假如 $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots a_n$ 能够同时整除

C。元 $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots a_n$ 的一个公倍元 d 叫做它们的最小公倍元，假如 d 能够整除 $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots a_n$ 的每一个公倍元。规定 0 与任何元的公倍元为零元。

定理：一个唯一分解环 I 的两个元 a 和 b 在 I 里一定有最小公倍元。a 和 b 的两个最小公倍元 d 和 d`只能差一个单位因子：d`=εd（ε是单位），即在相伴意义下是唯一的。

证明：若 a、b 之中有一个是零元，不妨设 a=0，那么 a 显然是一个最小公倍元。若是 a、b 之中有一个是单位，譬如 a 是单位元，那么显然 a 是最小公倍元。

现在看 a 和 b 都不是零元与单位元时的情形。这时 $a=q_1q_2\ldots q_r$,$b=q_1`q_2`\ldots q_s`$($q_i`.q_i$ 是素元)，q_i 同 $q_i`$这+个元素中间的某一个可能是其它一个的相伴元。假如在这 r+s 个元中间有 n 个元互相不是相伴元，而其它的元都是这 n 个元中的某一个的相伴元。把这个元叫做 $p_1,p_2,\ldots,p_n$,，那么 $a=\varepsilon_a p_1^{h1}p_2^{h2}\ldots p_n^{hn}$（$\varepsilon_a$ 是单位，$h_i\geqslant0$），$b=\varepsilon_b p_1^{k1}p_2^{k2}\ldots p_n^{kn}$（$\varepsilon_b$ 是单位，$k_i\geqslant0$）。令 $l_i=\max\{h_i,k_i\}$,而作元 $d=p_1^{l1}p_2^{l2}\ldots p_n^{ln}$,那么显然 a|d，b|d。假定 c 也是 a 与 b 的公倍元（c≠0）。若 c 是单位，则 a 与 b 均为单位元，d 也为单位元，命题成立。若 c 不是单位元，那么 $c=p_1`p_2`\ldots p_t`$（$p_i`$是素元），由于 a|c，p_j 能整除某一个 $p_i`$，而是 $p_i`$的相伴元，所以 $c=\varepsilon_c p_1^{m1}p_2^{m2}\ldots p_n^{mn}$（$\varepsilon_c$ 是单位，$m_i\geqslant0$），但 a|c，并且 p_i，p_j 互相不是相伴元，因此 $m_i\geqslant h_i$。同理，由 b|c 可得 $m_i\geqslant k_i$。这就是说，$m_i\geqslant l_i$，d|c。这样就证明了最小公倍元的存在。

假定 d`也是 a 和 b 的最小公倍元，那么 d|d`，d`|d:d`=ud，d=vd`,d=uvd。这样，若 d=0，d`=0，d=d`；若 d≠0，则 1=uv，u 是一个单位元ε，d`=εd。证毕。

由这一定理运用数学归纳法可得到推论：一个唯一分解环 I 的 n 个元 a_1，a_2，$\ldots a_n$ 在 I 里一定有最小公倍元，a_1，a_2，$\ldots a_n$ 的两个最小公倍元只能差一个单位因子。

7. 四面体重心的性质及其推广

（一） 前言

三角形是平面上最简单的封闭图形，四面体是空间最简单的封闭图形，它们之间存在这许多相似点，例如三角形中任何两边之和大于第三边，四面体中任何三个三角形的面积之和大于第四个三角形的面积；三角形与四面体都具有稳定性；三角形有五“心”，四面体中 YE 也有类似的概念（1）。

三角形的重心具有许多重要性质（3），三角形的重心定义及性质可进一步推广（2），那么四面体的重心是否也具有类似的性质，并可进一步推广，为此笔者尝试着进行了一些探索，得到了几个结论，并找到了一些应用，特提出以供商榷。

（二） 四面体重心的性质及应用

定义 1：连接四面体的一个顶点所对的面的重心的线段称为四面体过这个顶点的一条中线。

定理 1：四面体的四条中线共点，且这点把四面体的每一条中线都分成 3：1 的两段。

证明参阅（1）

定义 2：四面体的四条中线的交点称为这个四面体的重心。

定理 2：如下图所示，设 G 为四面体 ABCD 内一点，下面的命题组等价：

（1）G 为四面体的重心；

（2）设 E、F、G、H 分别为△ABC、△ABD、△BCD、△ACD 的重心，则 D、G、E 共线，C、G、F 共线，A、G、M 共线，B、G、M 共线，切 DG：GE=3：1，CG：GF=3：1，AG：GM=3：1，BG：GH=3：1；

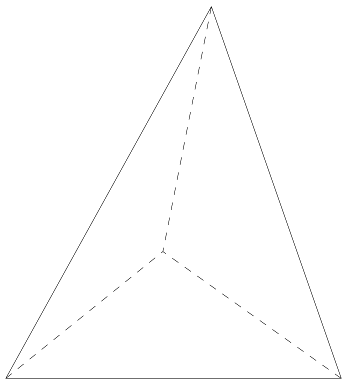
（3）平面 BDG、ADG、ABG、ACG 均把四面体分成体积相等的两部分；

（4）$V_{\text{四面体}GABC}=V_{\text{四面体}GACD}=V_{\text{四面体}GBCD}=V_{\text{四面体}GABD}=0.25V_{\text{四面体}ABCD}$；

（5）设 AB=c,BC=a,AC=b,AD=d,CD=e,BD=f,则 $AG^2=(3b^2+3c^2+3d^2-a^2-e^2-f^2)/16$, $BG^2=(3a^2+3c^2+3f^2-b^2-d^2-e^2)/16$, $CG^2=(3b^2+3a^2+3e^2-c^2-d^2-f^2)/16$, $DG^2=(3e^2+3f^2+3d^2-a^2-b^2-c^2)/16$;

(6)$a^2+b^2+c^2+4DG^2=a^2+e^2+f^2+4AG^2=d^2+b^2+e^2+4BG^2=c^2+d^2+f^2+4CG^2=0.75(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$;

(7)$AG^2+BG^2+CG^2+DG^2=0.25(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$;
(8)设 P 为四面体 ABCD 内一点，则 G 为使 $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$ 取得最小值点，且最小值为 $0.25(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$。



8. 实 数 的 量 子 化 理 论

(一)数学分析研究的时代背景

微积分是莱布尼茨和牛顿在 1661～1680 年间，以无穷小量为基点创立的，故叫做**无穷小量分析法**．它虽然在实践中无所不能，但却在**理论上**留下了微分 d*x* 既等于 0 又不等于 0 的矛盾之谜．例如：

求函数 $y=x^2$ 的导数时，令自变量 x 变化无穷小增量 dx≠0，则 y 随之变化增量 dy，所以

$$y+\mathrm{d}y=(x+\mathrm{d}x)^2=x^2+2x\mathrm{d}x+(\mathrm{d}x)^2.$$

上式两边同减去相等的量 y 和 x^2 得

$$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x+(\mathrm{d}x)^2.$$

因为 dx 是无穷小增量而非 0，即 dx≠0，所以，上式两边同除以 dx 得

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=2x+\mathrm{d}x.$$

因为 dx 是无穷小量，因此可以**看作或认为** dx = 0（**请注意**：其中的“**看作或认为**”体现出暴力性，因为把本来不为 0 的 dx **强行看作或认为**是 0），所以导数为

$$y'=(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)=2x+\mathrm{d}x=2x+0=2x. \qquad (1)$$

这样，求得的导数 $y'=2x$ 虽为真值，但却留下了 dx≠0 和 dx= 0 的矛盾之谜，叫做**微积分之谜**；因为主要是贝克莱指出了这个谜，所以该谜又叫做**贝克莱悖论**；因为该谜 200 年后仍未揭开，所以该谜还叫做**第二次数学危机**[第一次数学危机为$\sqrt{2}$]，并因此成了著名的**世界数学大难题**．

为了揭开微积分之谜，科学家们陆续奋斗了约 200 年（可见该世界数学大难题是多么的**大**和**难**），到了 19 世纪中叶，柯西等人用极限学说

修改了微积分，把 dx≠0 和 dx=0 的矛盾用极限符号**掩盖**起来，故使人们**难于发现**错误，所以人们就**误认为**揭开了微积分之谜，从而形成了**现行的经典理论**，叫做**标准分析法**.

但是，现行的标准分析法并未真正揭开微积分之谜. 例如，标准分析法求函数 $y = x^2$ 的导数时，令自变量 x 变化任意增量 $\Delta x \neq 0$，则 y 随之变化增量 Δy，所以

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^2 = x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$
$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$
$$\Delta y/\Delta x = 2x+\Delta x.$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y/\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x+0 = 2x . \qquad (2)$$

或在 $\Delta x \to 0$ 的条件下有

$$\lim(\Delta y/\Delta x) = \lim(2x+\Delta x) = 2x+0 = 2x. \qquad (2)$$

式(1)左数第三个等号左边的 dx≠0，右边的 dx=0；式(2)左数第二个等号左边的 $\Delta x \neq 0$，右边的 $\Delta x=0$. 而式(1)中的 dx 和式(2)中的 Δx 都是增量，所以标准分析法和无穷小量分析法一样，**没有揭开**微积分之谜.

另外，现行的标准分析法把**任意**函数 $y = f(x)$的自变量的微分 dx 凭空**想像**地**强行看作**或**认为**就是**特殊**函数 $y = x$ 的微分，然后用自己的微分定义求得**微分** dx 等于其函数的自变量的**增量** Δx，即 d$x = \Delta x$；甚至有的标准分析法名著就凭空**想像**地**强行**把 dx 直接**规定**为 Δx，即 d$x = \Delta x$. 这种“凭空想像地强行看作或认为甚至直接规定”的暴力性，和无穷小量分析法“把本来不等于 0 的 dx 强行看作或认为是 0”的暴力性是一脉相承的，所以标准分析法也和无穷小量分析法一样，**没有揭开**微积分之谜.

标准分析法**没有揭开**微积分之谜的现实，使**第二次数学危机**这个世界大难题的**解决**，延长到 300 多年后的今天，因此马克思批判说：“为了得到导函数，就必须令 $x_1=x$，所以是严格数学意义上的 $x_1-x=0$，而无须任何只是接近之类的遁辞.” **美国数学家、逻辑学家鲁滨逊**，也对人们做了下述批评：“在这个时期的历史写作中，有一个鲜明的对照：对于莱布尼茨及其追随者，给以严格的待遇，而对于极限学说的发起者的错误，却予以谅解.”由于人们严格地对待无穷小量分析法而谅解标准分析法的**错误**，因而并未发现标准分析法还增加了一个**新的**大错误，从而使得现行的经典理论——标准分析法的**大错误**增加为以下 3 条：

一是“凭空想像”的，而不是来源于实践的.

二是“强行看作或认为甚至直接规定”的，而不是用公理或成熟理论推导出来的.

三是新增加的那个大错误，即把微分概念和增量概念**混淆**了，亦即 $dx = \Delta x$.

微分概念 dx 和增量概念 Δx **混淆**的大错误，还给现行的经典理论——标准分析法惹了一个大麻烦．那就是：现行的经典理论——标准分析法把瞬时速率 v 定义为路程增量 Δs 与相应的时间增量 Δt 之比在时间增量 $\Delta t \to 0$ 时的极限．即

$v = \lim_{\Delta t \to 0}(\Delta s / \Delta t) = ds/dt = ds/\Delta t$［或：$v=\lim(\Delta s/\Delta t)=ds/dt=ds/\Delta t$（在 $\Delta t \to 0$ 的条件下）］.

瞬时速率 v 的物理意义是：瞬时内走过的路程与瞬时之比．那么，dt 是不是瞬时？若 dt 是瞬时，ds 是瞬时内走过的路程，那么现行的经典理论——标准分析法定义的瞬时速率 $v=ds/dt$ 就符合物理意义，所以**能称得上是来源于实践的理论**．但若 dt 是瞬时，那么 Δt 就必然是瞬时（因为 $dt=\Delta t$），而 Δt 时间内走过的路程是 Δs，所以，再按照瞬时速率 v 的物理意义，就应有瞬时速率 $v=\Delta s/\Delta t$，这就与 $v=ds/dt=ds/\Delta t$ 发生了矛盾．若 dt 不是瞬时，那么什么是瞬时？瞬时到底包含多少时间？如果不知道什么是瞬时，不知道瞬时到底包含多少时间，那么又怎么能知道，“路程增量 Δs 与相应的时间增量 Δt 之比在 $\Delta t \to 0$ 时的极限”，就一定是瞬时速率 v？这样，由于现行的经典理论——标准分析法不知道何为瞬时，不知道瞬时到底包含多少时间，而使得它的瞬时速率 v 的定义，又成了上述的**强行看作**或**认为**甚至**直接规定**的了.

㈡离散与连续的相对性与绝对性原理

连续和离散是矛盾的两个方面，也是相对性与绝对性的统一，根据唯物辩证法的观点它们也具有统一性的一面，从某一个方面考察是连续的量，从另一个方面考察是离散的。我们称之为离散与连续的相对性与绝对性原理。

根据离散与连续的相对性与绝对性原理可知，必须假定某些以前认为是连续的物理量是由基本量子组成的，例如容器中气体在宏观上施与器壁的压强是大量气体分子对器壁不断碰撞的结果。无规则运动的气体分子不断地与器壁相碰，就某一个分子来说，它对器壁的碰撞是离散的，而且它每次给器壁多大的冲量，碰在什么地方都是偶然的。但是对大量分子整体来说，每一时刻都有许多分子与器壁相碰，所以在宏观上就表现出一个恒定的、持续的压力。这和雨点打在雨伞上的情形很相似，一个个雨点打在雨伞上是离散的，大量密集的雨点打在伞上就使我们感受到一个持续的向下的压力。电影片的播放是离散的，但是在观众看来是连续播放的。在实数集中考察自然数集是离散的，但是在整数集中考察自然数集是连续的；光子的频率是离散的，但是在光谱学中可以认为是

连续的；引力质量从基本粒子的角度分析是离散的，但是根据相对论物体的运动状态可以连续变化，引力质量也可以连续变化。基因遗传与数量遗传分别是遗传的离散和连续的表现形式，数量遗传积累到一定程度肯定发生基因的变异，基因遗传是数量遗传长期积累的结果，生物的进化应当是用进废退（数量遗传）造成基因突变，在自然选择的作用下发展的。因此根据相对论时间和空间构成四维时空连续统，也可以认为时空是离散的，由时空量子组成。

㈢实数集的连续性与离散性

统一原可以被描述为由无数最小的单元即小无限所组成。实际上，统一原是永恒自在，绝对独立的客观实在，是一绝对统一的全息整体。统一原先于一切，包罗一切，规定一切，独立自由，至朴至实，统而为“一”，没有部分，绝对连续。“一”意味着唯一，没有部分，也没有边界，没有大小，超越了大小。无限大即无限小，反之亦然。无限不是有限事物的叠加，是不可度量的，是无限大与无限小的统一，是统一一切的客观实在，是包罗一切的绝对全息体。

实数集在标准分析中是连续的，但是实数集可以与数轴上的点建立一一对应关系，而数轴可以认为由可数个离散的区间组成的，只需要两种颜色就可以把数轴上的区间分开。在非标准分析中是离散的，每一个点由可数个点构成，由非标准分析可以知道实数集是离散、连续的对立统一。集合论的创始人 Cator 把无穷基数分为无穷个等级，一个比一个大，并进一步证明了“任何集 S 的超限数基数比集 S 超限数还大”。在这里“整体大于部分”成了谬误，而“部分大于整体”成为真理。复数可以与复平面上的点建立一一对应关系，而复平面可以认为由可数个矩形区域组成的，根据四色定理只需要四种颜色就可以把平面上的区域分开。由于数学归纳法适用于离散集，因此也可以适用于实数集与复数集。类似地，只需要 2n 种颜色就可以把 n 维空间中区域分开，现代数学认为至少需要 7 种颜色才能把环面上的区域分开，其实只需要 8 种即可。

根据离散与连续的相对性与绝对性可以得知，离散与连续具有统一性的一面，因此函数与数列、级数与积分便统一在一起，函数极限的四则运算法则与数列极限的四则运算法则、函数极限的性质与数列极限的性质、函数极限的判定与数列极限的判定其实是同一个问题，也不难理解 Heine 定理离散型；随机变量与连续型随机变量也是相对性与绝对性的统一。

㈣实数的量子化理论

基本假设：（1）每一个点由可数个点组成，每一个实数由可数个超实数组成。设$\not{c}$是实数集的 基 数，则超实数集的基数是$2^{\not{c}}$。

（2）设δ是超实数的基本单位，只能与整数进行乘法运算，δ=1/（+∞）；

(3) δ只能与整数进行乘法运算，运算法则与实数乘法的运算法则相同，a∈R，k∈Z, a +kδ=a,.即kδ为数学中的无穷小量。

㈤ 极 限 问 题 分 析

1、数列的极限

由上面的基本假设可以得知：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的本质是当n→∞时，$a_n=a+k\delta$， k∈Z，因此数列极限的四则运算法则成立，并且仅适用于有限项。由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的本质是当 n→∞时，$a_n=a+k\delta$， k ∈ Z，因此数列极限的下列命题成立：

①若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且a＞b，则总有一个正整数N存在，当n＞N 时，不等式$x_n>y_n$成立。

②若数列｛x_n｝收敛，则它的极限是唯一的。

③若有一正整数N，当n＞N 时，有$x_n\le y_n\le z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ = $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ =a，则有$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

④若｛x_n｝为有界数列，｛y_n｝为无穷小量，则它们的积｛x_ny_n｝是无穷小量。

9. 数学分析中的几个定理的探讨

摘要：本文对数学分析中的几个定理作了进一步的探讨，有放宽了条件，有的通过类比某些定理得到了新的定理。

关键词：拓广、莱布尼兹判别法、狄义希莱判别法、阿贝尔判别法

数学分析自从牛顿、莱布尼兹创立以来，在许多数学大师的努力之下日趋完善，建立起了完整的体系，并为其它学科的发展奠定了知识与方法论的基础。笔者通过学习发现数学分析中的几个定理有待于进一步改进。

10. 导 数 概 念 的 一 点 儿 扩 充

美学观念在自然科学的发展中起的作用是不可替代的。早在我国春秋时期，庄子则有“原天地之美，而达万物之理”的言句。而在古代西方，毕达哥拉斯学派则把对自然奥秘的探索与对自然美的追求统一起来；把数的和谐性作为科学解释的最高原则。自那时以来，寻求自然界的美成为了推动自然科学发展的动力。十七世纪以后，近代自然科学中兴起的经验主义思潮，曾一度造成了科学与美学在某种意义上的分离。进入二十世纪以来，以相对论和量子力学为代表

的近代物理学革命的兴起却在更大的深度上推动了科学美学的发展。众多的物理学家从各自的科学创造实践中感受到物理理论的审美价值；在美学原则的指引下，他们作出了杰出的工作。美学因素不仅渗透到科学创造的原动力中，而且也渗透到物理理论体系的构建与表述中。美学原则潜在地影响着科学成果的内容与形式；人们甚至把美学价值的大小看做是评价一个科学理论成就大小的重要标准。一元函数的导数反映了函数对自变量的变化率，在数学分析中有一些概念与导数不但存在着密切联系，而且具有许多相似的性质。如果把它们也定义为导数，就可以使数学知识之间具有一种和谐、对称的美感，而且有助于进一步认识导数以及这些概念的本质。

㈠ 不定积分定义为一元函数的负一阶导数

不定积分是求一个函数的原函数，不定积分和导数互为逆运算，Newton——莱布尼兹公式搭起了微分学与积分学之间的一座重要的桥梁。不定积分与导数既然互为逆运算，那么它们能否统一为一种运算呢？数学中许多互逆的运算都可以 统一为一种运算，例如加法与减法、乘法与除法、乘方与开方，因此笔者认为不定积分与导数既然互为逆运算，应当可以统一为一种运算，只需把不定积分定义为负一阶导数。

定义：在区间 X 上给出函数 f(x)，若存在 F（x）使得 F`（x）= f(x)，x∈X，或 dF(x)=f(x)dx，x∈X ，则称 F(x)是 f(x)的一个负一阶导数 ，f(x)的所有负一阶导数，记作 $f^{(-1)}(x)$或∫f(x)dx。

定理：设 F(x)是 f(x)的一个负一阶导数，则 $f^{(-1)}(x)=F(x)+C$。 证明略。

一般情况，函数 f (x)的-n+1 导数存在负一阶导数，称之为函数 f (x)的-n 阶导数，记为 $f^{(-n)}(x)$，即$〔f^{(-n+1)}(x)〕^{(-1)}=f^{(-n)}(x)$.

根据定义可知，一个函数 f (x)的负一阶导数即为它的不定积分，依然可以用∫f(x)dx 表示，而且还可以表示 n 次不定积分形式。在函数的各阶导数都存在的条件下，导数的所有阶可以进行代数和运算，即

$〔f^{(-1)}(x)〕`=f(x)$, $〔f`(x)〕^{(-1)}=f(x)$，$〔f^{(-n)}(x)〕^{(n)}=f(x)$,、、、、、、。这样定义以后，把导数运算与积分运算统一起来，而且可以看出数学知识之间具有一种和谐、对称和美感，函数的导数的阶数定义在整数集上。这样定义不仅仅是一种形式改变，而且可以对一些数学知识认识更加深刻，譬如微分方程与积分方程可以统一在一起，因为积分方程可以认为是负一阶微分方程，从而为寻找二者相似性与统一性搭起了一座桥梁。下面推导一下分部积分公式：

证明：∵(uv)`=u`v+v`u,∴$uv=(u`v)^{(-1)}+(v`u)^{(-1)}$.

∴$（u`v）^{(-1)}=uv—（v`u）^{(-1)}$,即∫vdu=uv-∫udv.

这样计算方法的一切固定的差别都消失了，一切都可以用相反的形式表示出来。

㈡把 Jacobi 行列式定义为函数组的导数

多元函数只有偏导数，但是多元函数的 Jacobi 行列式与一元函数的导数存在着极其相似的特点，因此笔者从数学美的角度尝试着拓广导数概念，将 Jacobi 行列式定义为函数组的导数.这样定义之后，反函数组存在的判定定理与一元函数的反函数存在定理、Jacobi 行列式的锁链法则与一元函数的锁链法则、反函数组的 Jacobi 行列式与一元函数的反函数的求导公式、多重积分的变量替换公式与定积分的变量替换公式便一致起来。

一元函数的导数表示函数对自变量的变化率，可以认为是位移的变化率，可以假设二元函数组的 Jacobi 行列式表示一个坐标系到另一个坐标系的面矢的变化率，三元函数组的 Jacobi 行列式表示一个坐标系到另一个坐标系的体矢的变化率，、、、、、、

为了与一元函数定积分公式统一起来，笔者建议在多重积分的变量替换公式中的 Jacobi 行列式的绝对值符号去掉。至于物理问题与几何问题可以根据其意义决定是否保留绝对值符号，求数量时加绝对值符号，求向量时去掉绝对值符号。

参考文献

1.《数学史概论》〔美〕H.伊夫斯 著 欧阳绛 译 山西人民出版社 1986 年 3 月 458 页。
2.《大学数学》 〔美〕E.克拉默 著 舒五昌 周仲良 编译 复旦大学出版社 67—77 页 。
3.《应用近世代数》 胡冠章 清华大学出版社 , 1993 年版, 25 页—27 页。
4.《数学猜想》 第一卷，数学中的归纳与类比，[美] G·波利亚著 ， 李心灿、王日爽、李志尧译，科学出版社，1987 年 8 月版 ，118 页—132 页。
5.《济南教育学院学报》2002 年第 4 期。

Mathematics Topics

Li Xuesheng

Shandong University, Shangdong, China
xiandaiwulixue@21cn.com

Abstract: This article describes several basic topics on the mathematics. [Academia Arena, 2009;1(3):70-]. ISSN 1553-992X.

Keywords: mathematic; logic; calculation