前人对贝尔不等式的误解

谭天荣

青岛大学 物理系 青岛 266071

ttr359@126.com

内容提要：贝尔对自己的工作有两点误解：第一，贝尔用以导出贝尔不等式的隐变量理论具有极为特殊的性质：它原封不动地保留了全部经典概率论的运算规则，贝尔却把这种理论当成一般的“定域隐变量理论”。第二，当贝尔从他的隐变量理论导出贝尔不等式时应用了两个命题，他把其中之一理解为“定域隐变量理论”的特征，而实际上导出贝尔不等式的却是另一命题。

维格纳在 1970 年曾给出对贝尔定理的“最简捷的”证明。他用一个“联合概率”的表达式取代了贝尔的“自旋相关函数”。他的思路是：先导出两个关于该联合概率的命题，一个表现量子力学的特征，另一个表现定域隐变量理论的特征，然后把贝尔定理的证明归结为证明这两个命题不能同时成立。这个证明本来可以揭示贝尔定理的错误，可惜维格纳却以为自己通过另一途径证明了贝尔定理。从物理的角度来看，维格纳只不过因为有贝尔定理先入为主，误解了自己所证明的结果。他的证明之所以更简捷的，只不过应用了两个并不成立的前提，因此他的证明在数学方面也没有可取之处。

北京大学的张启仁教授为贝尔不等式给出了一种新的推导，完全去掉了过去那些推导中的多余环节，并把贝尔的工作改写为如下命题：贝尔不等式表现了定域性原理；而与量子力学的自旋相关公式则表现了“远距离相关”。这一命题已经使得贝尔不等式与“隐变量理论”脱钩。

最先对贝尔的工作提出异议的是法国物理学家吉•洛查克。他最先指出“贝尔不等式是经典概率论的结论，与定域性原理无关。”这是一个至关重要的结论。但是洛查克未能把经典概率论中的概率运算规则与事件运算规则这两个组成部分区别开来。因此，虽然他正确地指出了推导贝尔不等式的过程中用了经典概率论；但是他不曾指出这一过程的致命的一步是对非布尔的事件空间应用了布尔代数的运算规则。

[Academia Arena, 2009;1(3):1-10]. ISSN 1553-992X.

关键词：贝尔不等式；经典概率论；维格纳；张启仁；吉•洛查克；定域性原理；隐变量理论；布尔代数；自旋相关公式；概率运算规则；事件运算规则

1. 引言

在《贝尔不等式与布尔代数》一文中，我们证明了如下两个定理，

定理 1：借助于实验事实

A：对于任意单位向量**a**和**b** 及其夹角 $\gamma = \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$，有：

$$\Pr(\sigma_b = 1|\sigma_a = 1) = \Pr(\sigma_b = -1|\sigma_a = -1) = \cos^2(\gamma/2);$$

$$\Pr(\sigma_b = 1|\sigma_a = -1) = \Pr(\sigma_b = -1|\sigma_a = 1) = \sin^2(\gamma/2),$$

以及如下联合概率的操作定义

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y) \equiv \Pr(\sigma_a = x) \cdot \Pr(\sigma_b = y | \sigma_a = x), \tag{1}$$

可以从自旋相关函数的经典表达式

$$\mathrm{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\sum_{xy} xy \Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y), \tag{2}$$

得出量子力学的自旋相关公式

$$\mathrm{P}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}。$$

定理 2：贝尔不等式

$$|\mathrm{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathrm{P}(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leqslant 1 + \mathrm{P}(\mathbf{b}, \mathbf{c})。$$

可以追溯到(2)式和如下命题

B：任意给定单位矢量$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$和$x,y,z \in \{1, -1\}$，存在函数$\mathrm{F}(x,y,z) \geqslant 0$，使得

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y) = \sum_z \mathrm{F}(x, y, z);$$

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_c = z) = \sum_y \mathrm{F}(x, y, z);$$

$$\Pr(\sigma_b = y, \sigma_c = z) = \sum_x \mathrm{F}(x, y, z)。$$

根据这两个定理我们得出结论：第一，在某些条件下，经典概率论可能与量子力学殊途同归，例如应用经典概率论，可以从自旋相关函数的定义导出量子力学的自旋相关公式。第二，贝尔不等式的破坏只不过表明经典概率论中的事件运算的布尔代数规则不适用于微观过程，既与定域性原理无关，也与隐变量理论无关。

本文将考察另一问题：为什么人们会得出贝尔定理。

2.　贝尔的误解

贝尔对贝尔定理的原始推导用到一种由一组公理来定义的隐变量理论。将这个理论应用于处于单态的一对电子所组成的系统 S，可以得出如下结论：

I、在S的自旋态函数之上添加一组记作λ的隐变量，可以确定第一个电子的自旋在$\mathbf{a}$方向的投影σ_a和第二个电子的自旋在$\mathbf{b}$方向的投影τ_b的单次测量的结果，即存在函数

$$\sigma_a = \mathrm{A}(\mathbf{a}, \lambda), \qquad \tau_b = \mathrm{B}(\mathbf{b}, \lambda)。$$

II、在隐变量的相空间（全体隐变量λ所成之集）Λ中，可以定义概率分布函数$\rho(\lambda) \geqslant 0$，使得：

第一，$\int_\Lambda \rho(\lambda)\, d\lambda = 1$（归一化）；

第二，对于Λ的任意子集Γ，有$\Pr(\lambda \in \Gamma) = \int_\Gamma \rho(\lambda)\, d\lambda$。

III、处于单态的一对电子的“自旋相关函数”表成

$$\mathrm{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_\Lambda \mathrm{A}(\mathbf{a},\lambda)\, \mathrm{B}(\mathbf{b},\lambda)\, \rho(\lambda)\, d\lambda。$$

下面，我们从 I、II 与 III 三个前提导出贝尔不等式，其方法与贝尔的推导略有不同。

首先，根据 I，实验事实 $\tau_b = -\sigma_b$，可表成

$$\mathrm{B}(\mathbf{b}, \lambda) = -\mathrm{A}(\mathbf{b}, \lambda)。$$

于是前提 III 可以表成

$$\mathrm{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\int_{\Lambda} \mathrm{A}(\mathbf{a},\lambda)\,\mathrm{A}(\mathbf{b},\lambda)\,\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda。$$

对于给定的 $x, y \in \{1, -1\}$，定义 Λ 的子集

$$\Gamma(x, y) \equiv \{\lambda \in \Lambda \,|\, \mathrm{A}(\mathbf{a}, \lambda) = x,\ \mathrm{A}(\mathbf{b}, \lambda) = y\},$$

则根据 II 可得到

$$\int_{\Gamma(x, y)} \rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y)。$$

和

$$\int_{\Gamma(x, y)} \mathrm{A}(\mathbf{a},\lambda)\,\mathrm{A}(\mathbf{b},\lambda)\,\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = xy\,\Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y)。$$

再根据积分的性质，得到

$$\int_{\Lambda} \mathrm{A}(\mathbf{a},\lambda)\,\mathrm{A}(\mathbf{b},\lambda)\,\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{xy}\int_{\Gamma(x, y)} \mathrm{A}(\mathbf{a},\lambda)\,\mathrm{A}(\mathbf{b},\lambda)\,\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda。$$

上面诸式给出 (2) 式。

其次，给定单位矢量 $\mathbf{c}$ 与变量 $z \in \{1, -1\}$ 以及 Λ 的另一子集

$$\Gamma(x, y, z) \equiv \{\lambda \in \Lambda \,|\, \mathrm{A}(\mathbf{a}, \lambda) = x,\ \mathrm{A}(\mathbf{b}, \lambda) = y,\ \mathrm{A}(\mathbf{c}, \lambda) = z\},$$

则 II 又给出：

$$\Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y,\ \sigma_c = z) = \int_{\Gamma(x, y, z)} \rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda。$$

根据积分的性质

$$\int_{\Gamma(x, y)} \rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \sum_{z}\int_{\Gamma(x, y, z)} \rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda,$$

从上面诸式我们得到

$$\Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y) = \sum_{z} \Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y,\ \sigma_c = z)。 \tag{3}$$

同样，从 I 与 II 也可得到

$$\Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_c = z) = \sum_{y} \Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y,\ \sigma_c = z); \tag{4}$$

$$\Pr(\sigma_b = y,\ \sigma_c = z) = \sum_{x} \Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y,\ \sigma_c = z)。 \tag{5}$$

再考虑到 $\rho(\lambda) \geqslant 0$，我们有

$$\Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y,\ \sigma_c = z) = \int_{\Gamma(x, y, z)} \rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda \geqslant 0。$$

上面诸式给出命题 B。

于是，从 I、II 和 III 可以导出了 (2) 式与命题 B。根据定理 2，从 (2) 式与命题 B 可以导出贝尔不等式，于是我们从 I、II 和 III 导出了贝尔不等式。

我们看到，所谓“定域隐变量理论”应用于贝尔所考察的问题，表现为前提I、II和III，而I、II和III之所以能得出贝尔不等式，则是因为它蕴含 (2) 式与命题B。但是，为了得到 (2) 式与命题

B，完全不需要“定域隐变量理论”这一深不可测而又富有哲理的前提，(2)式可从自旋相关函数的原始定义与实验事实 $\tau_b = -\sigma_b$ 得到，而命题B则可以从经典概率论的运算公式得到。这样，从贝尔证明的命题“贝尔不等式与量子力学不相容”得到的结论就不是贝尔定理，而是“(2)式与命题B的合取与量子力学不相容”。我们知道，定理 1 可知(2)式与量子力学相容，因此，I、II和III之所能导出贝尔不等式仅仅是因为它蕴含命题B，而不是因为它蕴含(2)式。由此我们得出结论：贝尔的工作实际上只不过证明了

C：命题 B 与量子力学不相容。

贝尔之所以得出贝尔定理，是因为他对自己的工作有两点误解：

第一，容易看出：I、II 和 III 之所以蕴含命题 B，是因为它原封不动地保留了整个经典概率论。而一般地说，遵循经典概率论的运算规则既不是隐变量理论的特征，也不是定域性原理的特征。因此，给出 I、II 和 III 的肯定不是一般意义下的“定域隐变量理论”，而是原封不动地保留了整个经典概率论的一种特殊理论，而贝尔却把自己应用的这一特殊理论当成一般的“定域隐变量理论”了。

第二，当贝尔从他的特殊理论导出贝尔不等式时，一方面用到了(2)式，另一方面用到了命题 B。但他用到命题 B 是间接的，而且还是不自觉的，他完全没有意识到自己应用了这个致命的命题。因此，他实际上把贝尔不等式追溯到(2)式，从而追溯到表达式

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_\Lambda A(\mathbf{a},\lambda)\, B(\mathbf{b},\lambda)\, \rho(\lambda)\, d\lambda,$$

并且通过这个表达式，追溯到他认为表现了定域隐变量理论特征的 $A(\mathbf{a},\lambda)$、$B(\mathbf{b},\lambda)$ 和 $\rho(\lambda)$ 三个函数。

正是由于这两点误解，贝尔得出了贝尔定理。

这两点误解也是量子物理学家们共同的误解。由于这两点误解，贝尔定理在物理学领域里掀起了持续的热潮，有些人努力从贝尔不等式的破坏得出更加新颖、更加匪夷所思的哲学结论，另一些人则在 $A(\mathbf{a},\lambda)$, $B(\mathbf{b},\lambda)$ 和 $\rho(\lambda)$ 三个函数的组合上绞尽脑汁，希望能找到某种隐蔽的假设，以便同时“挽救”定域性原理与实在论。

3. 维格纳对贝尔定理的证明

匈牙利物理学家F. P. 维格纳在 1970 年曾给出对贝尔定理的“最简捷的”证明。他的思路是：先导出两个关于 $\Pr(\sigma_a = x, \tau_b = y)$ 的命题，一个表现量子力学的特征，另一个表现定域隐变量理论的特征，然后把贝尔定理的证明归结为证明这两个命题不能同时成立。这个证明本来可以揭示贝尔定理的错误，可惜维格纳却以为自己通过另一途径证明了贝尔定理，原因之一是在维格纳的原始论文中，往往用文字叙述来取代公式推导，从而有太多的含糊不清之处。迄今为止，也没有人尽举手之劳来澄清它。为了阐明维格纳的证明的意义，我不得不把它从头改写如下：

首先，维格纳未加证明地给出如下两个公式：

$$\Pr(\sigma_a = x) = 1/2, \tag{6}$$

和

$$\Pr(\sigma_a = x,\ \tau_b = y)\ =\ \Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = -y)。 \tag{7}$$

应用这两个公式，他从(1)式与命题 A 得出结论：

D：对于任意单位向量**a**和**b** 及其夹角$\gamma = \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$，有：

$$\Pr(\sigma_a = 1,\ \tau_b = 1)\ =\ \frac{1}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}。$$

这就是维格纳用以表现量子力学的特征的命题。

其次，维格纳认为，根据定域隐变量理论可得出结论：可以引进如下六个事件

$$\sigma_a = x,\ \sigma_b = y,\ \sigma_c = z;\ \ \tau_a = x',\ \tau_b = y',\ \tau_c = z'$$

的联合概率，维格纳把这个联合概率略写成$(x, y, z; x', y', z')$，并应用经典概率论给出：

$$\Pr(\sigma_a = x,\ \tau_b = y')\ =\ \sum_T (x, y, z; x', y', z')。$$

其中符号$\sum_T$表示对$y, z, x', z' \in \{1, -1\}$求和。

根据实验事实$\tau_b = -\sigma_b$，只有当$x' = -x$，$y' = -y$，$z' = -z$时，维格纳引进的$(x, y, z; x', y', z')$才不为零。因此从上式可以得出：

E：对于任意单位向量 **a** 和 **b**，存在联合概率$(x, y, z; x', y', z')$，使得

$$\Pr(\sigma_a = x,\ \tau_b = -y)\ =\ \sum_z (x, y, z; -x, -y, -z)。$$

这就是维格纳用以表现定域隐变量理论的特征的命题。

应用(7)式，可以把命题D中的$\Pr(\sigma_a = 1, \tau_b = 1)$改成$\Pr(\sigma_a = 1, \sigma_b = -1)$，再适当轮换**a**、**b**和**c**，得到两个相似的等式，从而得到：

F：对于任意单位向量**a**,**b**,**c**及$\alpha = \angle(\mathbf{b}, \mathbf{c})$，$\beta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{c})$，$\gamma = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$，有：

$$\Pr(\sigma_a = 1,\ \sigma_b = -1)\ =\ \frac{1}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2};$$

$$\Pr(\sigma_b = 1,\ \sigma_c = -1)\ =\ \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\Pr(\sigma_a = 1,\ \sigma_c = -1)\ =\ \frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}。$$

另一方面，考虑在命题 E 中，

$$(x, y, z; -x, -y, -z)\ =\ \Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y,\ \sigma_c = z)。$$

再次应用(7)式，可以把命题E中的概率公式改写成(3)式。同样，也可得到(4)式与(5)式。考虑到$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z) \geqslant 0$，我们得到命题B。而从命题B容易得出

G：对于任意单位向量**a**,**b**,**c**，有：

$$\Pr(\sigma_a = 1,\ \sigma_b = -1)\ =\ F(1, -1, 1)\ +\ F(1, -1, -1);$$

$$\Pr(\sigma_a = 1,\ \sigma_c = -1)\ =\ F(1, 1, -1)\ +\ F(1, -1, -1);$$

$$\Pr(\sigma_b = 1,\ \sigma_c = -1)\ =\ F(1, 1, -1)\ +\ F(-1, 1, -1)。$$

注意到$F(x, y, z) \geqslant 0$，上面诸式给出不等式

$$\Pr(\sigma_a = 1,\ \sigma_b = -1)\ +\ \Pr(\sigma_b = 1,\ \sigma_c = -1)\ \geqslant\ \Pr(\sigma_a = 1,\ \sigma_c = -1)。$$

应用命题 G，上面的不等式变成

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\geqslant\sin^2\frac{\beta}{2}。$$

然而这一不等式对某些α、β和γ的取值并不成立，因此，导出它的命题F与命题G不能同时成立。

按照维格纳的思路，命题 F 来自命题 D，从而表现量子力学的特征；而命题 G 则来自命题 E，从而表现定域隐变量理论的特征。于是，证明了命题 F 与命题 G 不能同时成立证明了命题 D 与命题 E 不能同时成立，而证明了命题 D 与命题 E 不能同时成立就完成了对贝尔定理的证明。

在维格纳证明命题F与命题G不能同时成立的上述中，除了应用了某些量子力学的结论以外，归根结底只应用了命题B。因此维格纳上面所证明的也不过是命题C，即“命题B与量子力学不相容”。与贝尔的原始证明比较，维格纳证明的优点是摆脱了完全多余的表现贝尔所用的那种隐变量理论的命题与公式，更直接地导出了贝尔的这一结论。但是我们知道，命题B实际上仅表现联合概率 $\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y)$ 的性质，与“定域性原理”和“隐变量理论”都扯不上关系。因此，维格纳只要稍稍深入一步就会发现从他的工作并未得出贝尔定理。但是，在维格纳的推导过程中，尽管已经默认了导出(3)、(4)和(5)诸式的全部运算法则，从而完全可以不应用命题E直接导出命题B，却还是反复应用(7)式，绕来绕去最终用命题E取代(4)式导出命题B，造成贝尔不等式表现定域隐变量理论的特征的假象。因此，从物理的角度来看，维格纳只不过因为有贝尔定理先入为主，误解了自己所证明的结果。

另一方面，我们已经看到，贝尔的工作归根结底是证明了命题 C，而贝尔证明这一命题的途径是从命题 B 导出贝尔不等式，再证明贝尔不等式与量子力学不相容。维格纳的证明之所以“简捷”，乃是因为它没有通过贝尔不等式这一中间环节，直接证明这一命题，为此而付出的代价是：他应用了(6)式与(7)式。不幸的是，通过更细致的考察可以证明，这两个公式都不成立。因此，维格纳的证明在数学方面并无可取之处，他能通过更简捷的途径证明命题 C，只不过是侥幸从错误的前提得出了正确的结论。

4. 张启仁教授的工作

北京大学教授张启仁在他写的《量子力学》一书中[1]，有一节讨论贝尔不等式，这一节篇幅不大，却颇有新意。这里，按照我的理解，把张教授的论点改写如下：

按照量子力学，σ_a、σ_b和σ_c等可观察量是从测量中产生的。在玻姆的理想实验中，测量其中的一个粒子的自旋，则相互远离而又处于单态的一对粒子的“单态自旋的波函数”会立即“编缩”为两个粒子各自的自旋波函数的乘积，这一过程是“非定域的”，量子力学的自旋相关公式表现了这种非定域的“远距离关联”。

反之，如果电子自旋的测量值σ_a、σ_b和σ_c是客观存在的，与测量无关，则可以定义联合概率

$$F(x,y,z)\equiv\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z),$$

并得出如下结论：

第一，可以定义联合概率

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y) \equiv \sum_z \Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z);$$

并得出命题 B。

第二，从命题 B 导出结论：

任意给定单位矢量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$，存在函数 $F(x,y,z) \geqslant 0$，使得

$$E(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{xyz} xy\,F(x,y,z),$$

$$E(\mathbf{a},\mathbf{c}) = \sum_{xyz} xz\,F(x,y,z),$$

$$E(\mathbf{b},\mathbf{c}) = \sum_{xyz} yz\,F(x,y,z),$$

并从该结论导出不等式

$$|E(\mathbf{a},\mathbf{b}) - E(\mathbf{a},\mathbf{c})| \leqslant 1 - E(\mathbf{b},\mathbf{c})。$$

第三，从$E(\mathbf{a},\mathbf{b})$的定义，自旋相关函数的原始定义，再应用经典概率论，可以把自旋相关函数表成

$$P(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -E(\mathbf{a},\mathbf{b})。$$

第四，从上面两式导出贝尔不等式。

由此得出结论：如果 σ_a、σ_b和 σ_c是从测量产生的，则可以定义联合概率 $\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)$，从而导出贝尔不等式，与量子力学的自旋相关公式相反，该式表现“定域性原理”。

我们看到，张教授对贝尔不等式的推导比维格纳的更简捷，其中再也没有多余的环节。根据这一推导，张教授使得贝尔的结论与“隐变量理论”脱钩，把它改写为如下命题：“贝尔不等式表现定域性原理，而量子力学的自旋相关公式表现了远距离关联。”

对张教授的上述论点，我们有如下异议：

第一，量子力学的自旋相关公式可以借助于经典概率论从(2)式得到，而(2)式很难说表现了“σ_a、σ_b和σ_c等可观察量是从测量中产生的”这一“量子力学的观点”。

第二，定义联合概率 $\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)$，并应用

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y) \equiv \sum_z \Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z),$$

并不能导出贝尔不等式，导出贝尔不等式的致命的一步是应用命题 B，而命题 B 的毛病在于对非布尔的微观事件空间应用了布尔代数的事件运算规则，这一步不仅与隐变量理论无关，也与定域性原理无关，而且还与可观察量是否从测量中产生无关。

第三，可以证明，定域性原理与玻姆理想实验中的“远距离关联”并不矛盾。这一问题我们将在别处考察。

5. 洛查克的异议

最先对贝尔的工作提出异议的似乎是法国物理学家吉・洛查克。他在一篇文章[2]中写道：

“在贝尔的推理中，不仅用到一个表现定域性特征的假设，而且还用到一个统计学的假设……隐变量理论必须在全部测量结果的运算中恢复经典概率论。但这样立刻会在平均值的计算中与波动力学相矛盾。因为波动力学不遵循通常的概率论模式。这就不必惊讶以后会‘发现’波动力学与隐变量理论的计算结果之间的不一致。”

洛查克还在另一篇文章[3]中写道：

“在我看来，贝尔不等式与实验结果不一致与所谓‘非定域性’或‘不可分离性’完全无关。它只不过表明量子力学概率不是经典概率。这是一个我们已经发现了半个世纪多的事实。现在再次确认这一事实当然也是一件好事。但是，为了再次接受这一事实而动用这么多尖端而优秀的实验，似乎是不必要的。”

洛查克的论据似乎从来没有从数学-物理学的角度遭到反驳，但很多人由于它与权威的贝尔定理不一致而反对它，更多的人则不理睬甚至不知道它。他的论据已经使贝尔定理的讨论失去意义，可现在许多物理学的期刊仍然在讨论这一问题。

另一方面，洛查克的论点也是不能令人满意的。他认为只需指出在贝尔不等式的推导中用到经典概率论，特别是，指出这一推导中用到了不能同时测量的两个可观察量的联合概率，就已经足以使贝尔不等式与定域性原理脱钩。然而，这一论据是不充分的。

我们已经证明定理 1，它是显示经典概率论适用于微观过程的例子。因此仅仅知道在推导贝尔不等式时用过经典概率论并不能得出洛查克的结论：“贝尔不等式是经典概率论的结论，与定域性原理无关。”为了得出这一结论，我们还须弄清楚，究竟是经典概率论的哪个公式导致了贝尔不等式？这个导致贝尔不等式的公式究竟为什么不适用于微观过程？

在列举经典概率论的基本公式时，洛查克把乘法公式表成

$$\Pr(A\cdot B) = \Pr(A)\cdot\Pr(B|A) = \Pr(B)\cdot\Pr(A|B)。$$

在这里，洛查克事实上同时给出了两个公式，一个是

$$\Pr(A\cdot B) = \Pr(A)\cdot\Pr(B|A),$$

它来自概率的频率定义；另一个是

$$A\cdot B = B\cdot A。$$

它属于事件运算的布尔代数规则。洛查克未能把经典概率论的这两个前提区别开来。因此，虽然他正确地指出了推导贝尔不等式的过程中用了经典概率论；但是他不曾指出这一过程的致命的一步是对非布尔的事件空间应用了布尔代数的运算规则。

洛查克用了很多篇幅讨论隐变量理论问题，他坚持德布罗意的观点：隐变量应该遵循经典概率论的运算规律。按照这种观点，从隐变量的公式过渡到测量值之间的公式是一个颇为复杂的过程。这样的隐变量理论似乎只有使问题复杂化而无助于弄清楚贝尔不等式的起源。我们已经看到，贝尔不等式其实与隐变量理论无关。

尽管如此，洛查克的工作还是至关重要的，他第一个指出贝尔不等式与定域性原理无关，从而与量子力学中的所谓“远距离关联”的问题无关。如果人们接受这一论据，就会立刻失去对贝尔定理的兴趣。

6. 结束语

贝尔的工作引导我们对经典概率论对微观物理学领域的适用范围的问题的关注，我们由此得出结论：从概率的频率定义导出的概率运算规则（主要是加法公式与乘法公式）仍然适用于微观过程，但事件运算的布尔代数规则却不再适用。

上面我们考察了贝尔定理的三种证明，贝尔的原始证明，维格纳的“最简捷的”证明，以及张启仁教授的证明，并看到这三种证明实质上都是证明“命题 B 与量子力学相矛盾”。在贝尔的证明中，命题 B 被贝尔看作是“定域隐变量理论”的推论，它的应用是隐蔽的和间接的，这就为对贝尔不等式的误解定下基调；在维格纳的证明中，命题 B 以命题 D 的特殊形式出现，它与“定域隐变量理论”的联系已经很牵强；在张启仁的证明中，命题 B 直接应用于证明之中，实际上完全与“定域隐变量理论”脱钩并且本应得出结论：命题 B 仅仅是一个经典概率论的命题，从而贝尔的工作只不过再一次证明了经典概率论不完全适用于微观过程。在历史上，这一结论早已由洛查克给出。然而，还有一个关键的问题有待解决：为了导出命题 B，一方面要用到经典概率论的“概率运算规则”，另一方面要用到经典概率论的“事件运算规则”，到底是哪一个环节出了问题呢？我们的结论是：

第一，经典概率论的概率运算规则适用于微观过程。

第二，经典概率论的事件运算规则不适用于微观过程。

在这里，第二个命题众所周知，但第一个命题却似乎有点惊世骇俗。我们已经通过从经典概率论的概率运算规则导出量子力学的自旋相关公式，这一结论虽然并不是该命题的严格证明，但至少使得它不再是难以置信的。

这样就得出我们的主要结论：贝尔不等式乃是对非布尔的微观事件空间应用了布尔代数的运算规则的结果，它没有任何物理意义，更不表现任何哲学观点。

这个结论恐怕会令人失望：人们公认贝尔定理是“物理学中最重要的进展”和“科学中最深刻的发现”，而这个结论却揭示：这个定理实在是物理学家们不宜外扬的“家丑”。

参考文献

[1] 张启仁：《量子力学》高等教育出版社 1989 年版，p. 375。

[2] Lochak G. *Has Bell's Inequality a General Meaning for Hidden-Variable Theories*? [J]. Foundations of Physics, 1976, 6 (23),

[3] Lochak G. *De Broglie's Initial Conception of de Broglie Waves* [A]. Diner S et al. (ads.) The Wave－Particle Dualism [M]. D. Reidel Publishing Company, 1984.

Misunderstandings for Bell's Theorem

TAN Tianrong

(Department of Physics, Qingdao University, Qingdao 266071, P. R. China.)

ttr359@126.com

Abstract: It is pointed that Bell had two understandings for himself work: Firstly, the hidden variable theory that he applied for deriving Bell's inequality keeps the operating rules of classical probabilistic theory wholly intact, but he regarded it as the general local hidden variable theory. Secondly, in Bell's work, the promise actually deriving Bell's inequality is not the one that Bell regarded as the character of local hidden variable theory.

In 1970, Wigner gave "the most concise proof" for Bell's theorem. It replaces the spin correction function in the concerning expressions by a joint probability. His thinking is firstly deriving two propositions about this joint probability, one expresses the properties of quantum mechanics; the other characterizes local hidden variable theory. Afterwards, he summed the proving Bell's theorem up as that these two propositions cannot hold true simultaneously. By means of such a proof Wigner could have revealed Bell's theorem in its true colors, but he believe that it proved Bell's theorem in another way. As viewed from physics, Wigner just misunderstood his proof as a result of the preconceive ideal from Bell's theorem. The reason why his proof is simpler is merely because that he used two faulty promises, and thereby has not any merits examined from mathematics.

Prof. Zhang qiren in Beijing University gave a new proof for Bell's theorem, which wholly removes the unnecessary part in the former proofs, and rewrote Bell's outcome in the following form: Bell's inequality manifests locality principle and quantum mechanics spin correlation formula indicates "correlation at a distance". This proposition makes Bell's inequality separates from hidden variable theory.

The first person who took objection against Bell's work is a France physicist G. Lochak. He pointed out that Bell's inequality is resulted from classical probability theory and has nothing to do with locality. This conclusion is of great importance. But Lochak has never distinguished between the laws of probability operations and those of event operations. Therefore, though he has pointed out that Bell has applied the formulae in classical probability theory in the process deriving Bell's inequality, but he has never demonstrated that the vital step in this process is to apply the laws of Boolean algebra to non-Boolean event space. [Academia Arena, 2009;1(3):1-10]. ISSN 1553-992X.

Key words: Bell's inequality; classical probabilistic theory; Wigner; Zhang Qiren; G. lochak; locality principle; hidden variable theory; Boolean algebra; spin correlation formula; probability operations; event operations